Övning 2006–05–10

Heath 7.1 Tag de tre punkterna $(-1,1),(0,0),(1,1)=(x_k, f(x_k))$.

Interpolationspolynomet $p_2(x)$ har graden $\leqslant 2$. $f(x)=P_2(x)+R_3(x)$. Polynomet är entydigt:

1) Newtons form: $P_2(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)$.

Bestäm A_0, A_1 och A_2: $P_2(x_0)=f(x_0), P_2(x_1)=f(x_1), P_2(x_2)=f(x_2)$.

$$P_2(x_0)=1=A_0$$

$$P_2(x_1)=0=1+A_1(0+1)+A_2\cdot 0 \Longrightarrow A_1=-1$$

$$P_2(x_2)=1=1-1(1+1)+A_2(1+1)(1) \Longrightarrow A_2=1$$

$$P_2(x)=1-1\,(x+1)+1\,(x+1)(x-0)=x^2$$

2) Lagranges form:

$$P_2=f(x_0)\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x)=1\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+0\cdot\underline{\qquad\qquad}+1\cdot\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$

”Plus noll — nej, förlåt mig, minus noll!”

3) “Som avskräckande”: $p_2(x)=a\,x^2+b\,x+c$. Satisfiera de tre punkterna:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Löses: $p_2(x)=x^2$.

Heath 7.3 Tag $p_n(x)=a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_1\,x+a_0$. Kostar $n+(n-1)+\ldots+1$ multiplikationer: $\frac{(n+1)n}{2}$.

$p_n(x)=(\cdots(((a_n\,x+a_{n-1})\,x+a_{n-2})x+\cdots+a_1\,x)$: Horners schema: kostar n multiplikationer.

Apropå 7.1. I matlab `interp1(x⃗, y⃗, xfin)`, linjär interpolation (1 dimension).

`interp1(x⃗, y⃗, xfin, 'cubic')`.

Heath 7.9 Vi har

x	a	b	c
$f(x)$	f_a	f_b	f_c

Interpolera f med ett polynom av grad $\leqslant 2$ (vi har 3 punkter).

I vanliga fall är x den oberoende variabeln. Nu tar vi $f(x)=y$ som den oberoende variabeln och betraktar $x=f^{-1}(y)$ som beroende. Om vi gör det kan Lagranges form skrivas

$$p_2(y)=a\,\frac{(y-f_b)(y-f_c)}{(f_a-f_b)(f_a-f_c)}+b\,\frac{(y-f_a)(y-f_c)}{(f_b-f_a)(f_b-f_c)}+c\,\frac{(y-f_a)(y-f_b)}{(f_c-f_a)(f_c-f_b)}$$

Bestämma f:s nollställen.

$$p_2(0) = a\,\frac{f_b f_c}{(f_a - f_b)(f_a - f_c)} + b\,\frac{f_a\,f_c}{(f_b - f_a)(f_b - f_c)} + c\,\frac{f_a\,f_b}{(f_c - f_a)(f_c - f_b)}$$

Extra 18 Approximera med spline av grad $\leqslant 2$ tabellen:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	5	6	5

Med tillägget $s'(1) = 0$.

1. Tillägget har vi i "vänsterkanten". Börja då med det vänstra delintervallet:

$$s_1(x) = 2 + k_1(x-1) + k_2(x-1)^2$$

$$s_1'(x) = k_1 + 2\,k_2(x-1)\text{: } s_1'(1) = 0 \Longrightarrow k_1 = 0$$

$$s_1(2) = 3 = 2 + 0 + k_2 \cdot (2-1)^2 \Longrightarrow k_2 = 1$$

$$s_1(x) = 2 + (x-1)^2$$

$s_1'(2) = 2$ (för att veta att $s_2'(2)$ ska vara 2).

$$s_2(x) = 3 + l_1(x-2) + l_2(x-2)^2$$

$$s_2'(x) = l_1 + 2l_2(x-2)$$

$s_2'(2)$ skall vara $= s_1'(2) = 2 \Longrightarrow l_1 = 2$.

$$s_2(3) = 5 = 3 + 2(3-2) + l_2(3-2)^2 \Longrightarrow l_2 = 0$$

$$s_2(x) = 3 + 2(x-2)$$

Fortsatta räkningar ger så småningom:

$$s(x) = \begin{cases} 2 + (x+1)^2 & \text{på } [1,2] \\ 3 + 2(x-2) & \text{på } [2,3] \\ 5 + 2(x-3) - (x-3)^2 & \text{på } [3,4] \\ 6 - (x-4)^2 & \text{på } [4,5] \end{cases}$$

MATLAB: `spline(x⃗,y⃗,xfin,` kantvillkor `)` ger kubisk spline.