Övning 2006–03–20

Lay 4.5.1 Betrakta

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} s-2t \\ s+t \\ 3t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dessa vektorer är linjärt oberoende: kan bilda bas.

$$\dim\left(\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\right) = 2$$

Ett underrum i $\mathbb{R}^3$!

Lay 4.5.5

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a-4b-2c \\ 2a+5b-4c \\ -a+2c \\ -3a+7b+6c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tre vektorer, som dock är linjärt beroende.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Den "första" och den "andra" är linjärt oberoende; kan bilda bas i ett underrum av dimension 2 till $\mathbb{R}^4$.

Lay 4.5.7

$$\begin{cases} a-3b+c=0 \\ b-2c=0 \\ 2b-c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Nul}(A)$$

Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=0$$

Bara nollelementet i vår mängd $\Longrightarrow \dim = 0$.

Lay 4.5.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Svaret ges ur $\mathrm{Col}(A)$.

För kolonner i A gäller att deras linjära (o)beroende inte påverkas av elementära rad- eller kolonn-operationer. Radpoerationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & -20 & 15 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 kolonner är linjärt operoende, t.ex. nummer 1 och nummer 2: de två första i A kan bilda bas.

Lay 4.5.13 Sök $\dim(\mathrm{Nul}(A))$ och $\dim(\mathrm{Coll}(A))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivotelement $\Longrightarrow$ $\mathrm{Col}(A)$ har dim $=3$. Om $\mathrm{Nul}(A)$: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har två fria variabler: $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 2$.

Lay 4.5.21 Bildar "våra" polynom en bas i $\mathbb{P}_3$ (polynom av grad $\leqslant 3$). $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$. En bas i $\mathbb{P}_3$, t.ex. $\{1, t, t^2, t^3\}$ i denna basen:

$$1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2t \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 - 4t^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-12t + 8t^3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

dvs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

4 pivotelement $\Longrightarrow$ kolonnerna är linjärt oberoende $\Longrightarrow$ de kan bilda bas i $\mathbb{P}_3$ vars dimension är 4.

Lay 4.6.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & 6 & 10 & -7 \end{pmatrix}$$

är radekvivalent med

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$$

2 linjärt oberoende kolumner i $B \Longrightarrow \text{rang}(B) = 2$, dvs $\text{rang}(A) = 2$.

De två första kolonnerna i B är linjärt oberoende $\Longrightarrow$ de två första kolonnerna i A är också det: bas till $\text{Col}(A)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 2$$

Vi har två rader i A som är linjärt oberoende; de två första raderna i B är linjärt oberoende $\Longrightarrow$ de 2 första raderna i A är linjärt oberoende $\Longrightarrow \text{Row}(A)$ spänns av $\{[1, -4, 9, 7], [-1, 2, -4, 1]\}$ $\text{Nul}(A)$, beräknas via B: med

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = s \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{6t - 5s}{2} \\ x_1 = s - 5t \end{cases}$$

$$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lay 4.6.5 Vår matris är $A \in \mathbb{R}^{3 \times 8}$, $\text{rang}(A) = 3$.

Sats 14: $\dim(\text{Nul}(A)) = 8 - 3 = 5$

$\text{rang}(A^T) = \dim(\text{Col}(A^T)) = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A)$.

Lay 4.6.13 Om A är en 7×5-matris: $\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) \leqslant 5$ (antalet kolonner).

Om A är en 5×7-matris: $\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) \leqslant 5$ (antalet rader).

Lay 4.6.19 Vi har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $A \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$. Alla lösningar spänns av en vektor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \in \text{Nul}(A) \Longrightarrow \dim(\text{Nul}(A)) = 1$$

$\boldsymbol{u}$ får vara en bas i nollrummet. Vi har 6 kolonner. Nu är $\dim(\text{Col}(A)) = 6 - \dim(\text{Nul}(A)) = 5$. Antal komponenter i varje kolonn är 5 st $\Longrightarrow$ kolonnerna $\in \mathbb{R}^5$. Kolonnerna spänner alltså $\mathbb{R}^5$.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5 \Rightarrow \boldsymbol{b}$ kan skrivas som en kombination av kolonnerna. Systemet är alltså alltid lösbart.

Lay 4.6.31 Med

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3a & -3b & -3c \\ 5a & 5b & 5c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Detta innebär att

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{spänner}$$

För varje val av a, b, c blir dimensionen $\leqslant 1$ (lika med noll om $a = b = c = 0$).

Lay 4.7.1 Tag två baser i V: $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}; C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = 6\,\boldsymbol{c}_1 - 2\,\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 = 9\,\boldsymbol{c}_1 - 4\,\boldsymbol{c}_2 \end{cases}$$

Transformationsmatrisen från basen B till basen C ($[\boldsymbol{x}]_C = P_{C \leftarrow B}\,[\boldsymbol{x}]_B$):

$$P_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} | & | \\ [\boldsymbol{b}_1]_C & [\boldsymbol{b}_2]_C \\ | & | \end{pmatrix}$$

ty:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}_C = P_{C \leftarrow B} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$P_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$