2006–10–02

Uppgift 2.6.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 4x^2 + 5}\,\mathrm{d}x$$

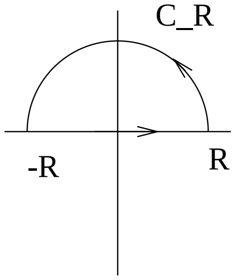
Detta är en integral av typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Krav för att det ska fungera:

1. Q har inga reella nollställen.
2. $\deg Q \geqslant \deg P + 2$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 4z^2 + 5}$$



Figur 1.

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

där R är tillräckligt stort för att alla nollställen till Q i det övre halvplanet, ligger innanför Γ_R.

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{öhp}} \mathrm{Res}_{z_k} f$$

$$\mathrm{VL} = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x}_{\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z}_{\overset{?}{\longrightarrow} 0 \text{ då } R \to \infty}$$

Q:s nollställen:

$$\left(z^2 - 2\right)^2 = -1$$

$$z^2 = 2 \pm \mathrm{i}$$

Betrakta först $z^2 = 2 + \mathrm{i}$. Ansätt $z = a + b\mathrm{i}$:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$2a^2 = 2 + \sqrt{5} \Longrightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$$

$$2b^2 = \sqrt{5} - 2 \Longrightarrow b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

$+$ med $+$ och $-$ med $-$, ty a och b har samma tecken.

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}$$

z_1 ligger i det övre halvplanet, så den kommer att vara intressant för oss. z_2 gör det inte: den är ointressant nu.

Betrakta sedan $z^2 = 2 - \mathrm{i}$ på samma sätt:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2\,a\,b = -1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

Det enda som skiljer sig från ovanstående är att a och b har olika tecken.

$$z_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} = \bar{z}_1$$

$$z_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} = \bar{z}_2$$

z_3 ligger inte i övre halvplanet, z_4 gör det. z_1 och z_2 är alltså de intressanta rötterna.

$$2\,\pi\,\mathrm{i}(\mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_4} f)$$

Betrakta

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

där g, h är analytiska i D. Om z_0 är ett nollställe med multiplicitet m för h, då är z_0 en *pol* av ordning m för f, förutsatt att $g(z_0) \neq 0$.

Kring z_0:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots$$

Förlänger med $(z-z_0)^m$:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big) = (m-1)!\,a_{-1} + \mathfrak{O}\,(z-z_0)$$

$z \to z_0$:

$$\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\ f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big)$$

Tillbaka till exemplet vi räknar på. $m = 1$ (enkelpoler, båda två).

$$\operatorname{Res}_{z_1} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}(z - z_1)^1 \bigg|_{z = z_1} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z^4)}(z - z_1) \bigg|_{z = z_1} =$$

$$= \frac{2 + \mathrm{i}}{\left(2\left[\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right]\right)\left(2\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right)\left(2\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{2 + \mathrm{i}}{8\mathrm{i}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2 + \mathrm{i}}{4\mathrm{i}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z_4} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{2 - \mathrm{i}}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)} =$$

$$= \frac{2 - \mathrm{i}}{\left(-2\sqrt{\frac{5 + 2}{2}}\right)\left(2\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right)\left(2\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right]\right)} =$$

$$= \frac{2 - \mathrm{i}}{-4\mathrm{i}\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}\right)}$$

Går nu integralen över C_R mot noll, är vi så gott som klara.

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{z^4 - 4z^2 + 5}\,\mathrm{d}z\right| = \begin{bmatrix} z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{d}z = R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{bmatrix} =$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}{R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} - 4R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 5} \cdot R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant$$

$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1$. $|a + b| \geqslant ||a| - |b|| = |a| - |b|$ om $|a| > |b|$ används i nämnaren: $|R^4\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} - 4R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 5| \geqslant$ $\geqslant R^4 \cdot 1 - 4R^2 \cdot 1 - 5$.

$$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{R^2}{R - 4R^2 - 5} R\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^3}{R^4 - 4R^2 - 5} \longrightarrow 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$

Således:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 4x^2 + 5}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\operatorname*{Res}_{z_1} f + \operatorname*{Res}_{z_2} f\right) \in \mathbb{R}$$

Uppgift 2.6.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\,\mathrm{d}x$$

Detta är en integral av typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{Bmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$

1. Q har inga nollställen $\in \mathbb{R}$.

2. $\deg Q \geqslant \deg P + 1$.

I fallet då $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ går det till ungefär som förut.

Om $\deg Q = \deg P + 1$: vi kommer att behöva Jordans lemma (läs i KH). $\square$

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Val av kontur, halvcirkel i övre halvplanet, eller i nedre halvplanet?

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

ej bra val.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)} \mathrm{d}x = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(x^2+1)(x^2+4)} \mathrm{d}x$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(z^2+1)(z^2+4)} \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(x^2+1)(x^2+4)} \mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(z^2+1)(z^2+4)} \mathrm{d}z$$

Går den senare mot noll? För vilka α?

$$Q(z) = \left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)$$

$$z_1 = \mathrm{i}, \quad z_2 = -\mathrm{i}, \quad z_3 = 2\,\mathrm{i}, \quad z_4 = -2\,\mathrm{i}$$

z_1 och z_3 ligger i övre halvplanet.

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\, f = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})}(z-\mathrm{i})\bigg|_{z=\mathrm{i}} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{2\,\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}) \cdot 3\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{6\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{Res}_{2\mathrm{i}}\, f = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})}(z-2\mathrm{i})\bigg|_{z=2\mathrm{i}} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\mathrm{i} \cdot 3\,\mathrm{i} \cdot 4\,\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{12\mathrm{i}}$$

Vad händer på halvcirkeln?

$$\left| \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{(z^2+\mathrm{i})(z^2+4)} \mathrm{d}z \right| = \begin{bmatrix} z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{d}z = R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{bmatrix} =$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha\,R(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\cos\theta}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha R\cos\theta}\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1)(R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+4)} R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \right| \leqslant$$

Den valda konturen (halvcirkel i öhp) fungerar då $\alpha \geqslant 0$, ty $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ger positiv sinus.

$$\leqslant [\text{observera minustecknen}] \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\overbrace{|\mathrm{e}^{-\alpha R\sin\theta}|}^{\leqslant 1 \text{ för } \alpha \geqslant 0}}{(R^2-1)(R^2-4)} R\,\mathrm{d}\theta \leqslant$$

$$\leqslant \pi \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)} \cdot R \longrightarrow 0 \quad \text{då } R \to \infty$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha x}}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x = 2\,\pi\,\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{6\,\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{12\,\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{6}(2\,\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-2\alpha})$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int \cdots = \frac{\pi}{6}(2\,\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-2\alpha})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int \cdots = 0$$

För $\alpha \leqslant 0$ väljer vi halvcirkeln i undre halvplanet, $\theta \in [-\pi, 0]$, $R \xrightarrow{x} -R$.

$\cos\alpha x$ är en jämn funktion. $\cos\alpha x = \cos(-\alpha x) = \cos|\alpha|x$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \ldots \text{ med } |\alpha|x \text{ istället för } \alpha.$$

Analytiska funktioners nollställen

SATS: Analytiska funktioners $(\not\equiv 0)$ nollställen är isolerade.

$$f(z_0) = 0 \Longleftrightarrow f(z) = (z - z_0)^m\, g(z)$$

där g är en analytisk funktion med $g(z_0) \neq 0$. Analytisk $\Rightarrow$ kontinuerlig. $g(z) \neq 0$ i en omgivning till z_0. $\Longrightarrow f \neq 0$ i en punkterad omgivning till $z_0 \Rightarrow z_0$ är ett isolerat nollställe.

FÖLJDSATS: f har ett icke-isolerat nollställe i z_0 (f analytisk i z_0).

$$\Longrightarrow f \equiv 0 \quad \text{i en omgivning till } z_0$$

$\overset{?}{\Longrightarrow} f \equiv 0$ i D. $\langle$fig2$\rangle$ Analytisk fortsättning. D är sammanhängande. Varje kompakt mängd har egenskapen att en övertäckning har en ändlig övertäckning.