2006–09–28

Isolerade singulära punkter

SATS: f är analytisk i en punkterad omgivning till z_0 (omgivningen $\{z\colon 0 < |z - z_0| < R\}$). Då är följande påståenden ekvivalenta

1. f:s Laurentutveckling kring z_0 i $\{z\colon 0 < |z - z_0| < R\}$ innehåller inga negativa potenser av $(z - z_0)$.

2. $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

3. f är begränsad i en punkterad omgivning till z_0.

Här handlar det alltså om hävbara singulariteter. Man kan ta endera som definition, men man brukar inte ta nr 3.

Bevis. $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3, 3 \Rightarrow 1$

$1. \overset{?}{\Longrightarrow} 2.$

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots \quad \text{i } \{0 < |z - z_0| < R\}$$

Låt $z \to z_0$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}$$

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{då } z \neq z_0 \\ a_0 & \text{då } z = z_0 \end{cases}$$

Då är $\tilde{f}$ analytisk i $\{z\colon |z - z_0| < R\}$.

$2. \overset{?}{\Longrightarrow} 3.$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0\colon \quad \forall z\colon 0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \quad |f(z) - L| < \varepsilon$$

Tag $\varepsilon = 1$. $\exists \delta_1 > 0$: $\quad \forall z\colon 0 < |z - z_0| < \delta_1 \quad |f(z) - L| < 1$

$$\Longrightarrow |f(z)| = |(f(z) - L) + L| \leqslant |f(z) - L| + |L| < |L| + 1$$

Och detta för alla z i omgivningen $\{0 < |z - z_0| < \delta_1\}$. $\Rightarrow f$ begränsad i omgivningen.

$3. \overset{?}{\Longrightarrow} 1.$ Det mest intressanta fallet.

RIEMANNS SATS: Om f är begränsad och analytisk i en punkterad omgivning till z_0, så är alla koefficienter framför negativa potenser i f:s Laurentutveckling kring z_0 i U lika med 0. $||$.

$$f(z) = \cdots + a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + a_0 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Att visa: $a_{-m}=0\,\forall m\in\mathbb{N}^+$.

$$a_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a_{-m}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-m+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_r}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{m-1}\mathrm{d}\zeta$$

$$|a_{-m}|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_r}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{m-1}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}Mr^{m-1}2\pi r=Mr^m\longrightarrow 0 \text{ då } r\to 0$$

där M är sådant att $|f(z)|\leqslant M$.

$$\Rightarrow a_{-m}=0$$

□

Sats: f analytisk i $\{0<|z-z_0|<r\}$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

1. f:s Lurentutveckling kring z_0 i $\{0<|z-z_0|<r\}$ innehåller ändligt många negativa potenser av $z-z_0$.

2. $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

(z_0 är en pol)||. Titta på beviset:

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m},\text{ där } g \text{ är analytisk i } \{0<|z-z_0|<r\} \text{ och } g(z_0)\neq 0.$$

$m=$ polens ordning.

Sats: f är analytisk i $\{0<|z-z_0|<r\}$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

1. f:s Lurentutveckling kring z_0 i $\{0<|z-z_0|<r\}$ innehåller oändligt många negativa potenser av $z-z_0$.

2. $\nexists\lim_{z\to z_0}f(z)$, vare sig ändligt eller oändligt.

(z_0 är en väsentlig singularitet.)

Bevis. Följer direkt av de två tidigare satserna. □

Sats: (**Casorati-Weierstraß' sats**) f har en väsentlig singularitet i z_0. $\alpha\in\overset{(-)}{\mathbb{C}}$ godtyckligt.

$$\forall\varepsilon>0\quad\forall\eta>0\quad\exists z_\eta\colon\quad |z_\eta-z_0|<\eta,\quad |f(z_\eta)-\alpha|<\varepsilon$$

$$[\Longleftrightarrow\exists \text{ följd } z_1,z_2,\ldots, \text{ så att } z_n\to z_0 \text{ och } f(z_n)\to\alpha]$$

Bevis. Antag motsatsen, dvs

$$\exists\alpha_0\in\overset{(-)}{\mathbb{C}},\exists\varepsilon_0,\eta_0>0 \text{ så att } \forall z\colon|z-z_0|<\eta_0,\quad |f(z)-\alpha_0|\geqslant\varepsilon_0$$

Betrakta φ i $\{0 < |z - z_0| < \eta_0\}$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_0}$$

Nämnaren $\neq 0$ i mängden. φ är analytisk i $\{0 < |z - z_0| < \eta_0\}$.

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Begränsad. Enligt Riemanns sats så finns ett gränsvärde:

$$\exists \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = l \in \mathbb{C}$$

(z_0 hävbar för φ).

$$\frac{1}{f(z) - \alpha_0} \to l$$

1. $l \neq 0$:

$$f(z) - a_0 \to \frac{1}{l}$$

a_0 är en konstant. "Den går inte någonstans egentligen."

$$f(z) \to \alpha_0 + \frac{1}{l} \quad \text{då} \quad z \to z_0$$

Varför är det här en motsägelse?

$\Rightarrow z_0$ hävbar. Motsägelse: det var givet att z_0 är en väsentlig singularitet.

2. $l = 0$:

$$f(z) - \alpha_0 \to \infty$$

$$f(z) \to \infty$$

$\Longrightarrow z_0$ är en pol. Men det är det inte: Motsägelse! □

Fundera på: Hur gör man om $\alpha = \infty$? Det blir väsentligen samma grej.

Exempel.

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

Jag vill lösa $\mathrm{e}^{1/z} = A$. Finns det lösningar godtyckligt nära 0 när $A \neq 0$ väljes godtyckligt.

Alla lösningar ges av:

$$\frac{1}{z} = \log A$$

$$\frac{1}{z_k} = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\,k\,\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_k = \frac{1}{\ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\,k\,\pi)} \longrightarrow 0 \text{ då } k \to \infty$$

Maximumprincipen och Schwarz lemma

Maximumprincipen: f är analytisk i D (begränsad), $f \not\equiv$ konstant $\Rightarrow |f|$ inte kan ha lokalt maximum i D.

f analytisk i D, $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $f \not\equiv$ konstant $\Rightarrow |f|$ antar maximum på ∂D och endast på ∂D.

Schwarz Lemma: f är analytisk i $\Omega = \{z\colon |z| < 1\}$. $f(0) = 0$. $|f| \leqslant 1$ i Ω.

$$\Longrightarrow |f(z)| \leqslant |z| \quad \text{i } \Omega$$

Om $|f(z_0)| = |z_0|$ för något $z_0 \neq 0$, så

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$$

där $\theta \in \mathbb{R}$.

Bevis. f analytisk i Ω. $f(0) = 0$. Alltså: $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$.

$$\text{Sätt} \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{om } z \neq 0 \\ a_1 & \text{om } z = 0 \end{cases}$$

Betrakta $g(z)$ i $\{|z| \leqslant r\}$, $r < 1$.

På $|z| = r$:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leqslant \frac{1}{r}$$

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{r} \quad \text{i hela skivan enligt maximumprincipen}$$

Om vi låter $r \to 1$ får vi (g är oberoende av r) att $|g(z)| \leqslant 1$ för alla $z \in \Omega = \{|z| < 1\}$.

$$\forall z \in \{|z| < 1\}, z \neq 0 \quad |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant 1$$

$$\Longrightarrow |f(z)| \leqslant |z| \quad \forall z \in \Omega \setminus \{0\}$$

Med $z = 0$ får vi $|f(0)| = |0|$ OK.

$$\Longrightarrow |f(z)| \leqslant |z| \quad \text{i } \{|z| < 1\}$$

Antag att det finns z_0 så att $|z_0| < 1$ och $|f(z_0)| = |z_0|$.

$$\Longrightarrow |g(z_0)| = 1$$

$\langle$fig1$\rangle$. $\Longrightarrow |g|$ har lokalt maximum i z_0 (inre punkt) $\Rightarrow g \equiv$ konstant. $|g| \equiv 1 \Rightarrow g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$$f(z) = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \square$$