2006–11–08

Transformmetoder

Tidsdomän. Elektriskt nät beskrivs med en differentialekvation. Denna löses uttryckt i tidsdomän.

Eller transformera till frekvensdomänen: Elektriskt nät beskrivs av algebraiska ekvationer. Dessa löses; vi får lösning uttryckt i frekvensdomänen. Inverstransformeras till tidsdomänen.

Laplacetransform (enkelsidig)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = F(s) \quad \subset \quad f(t)$$

$s = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$.

I likhet med jω-metoden transformerar vi kretsen direkt genom att transformera varje kretselement och källa för sig. Därefter startar beräkningarna. De beräkningsmetoder som vi tidigare använt vid likströmskretsar gäller även för Laplacetransformerade nät.

Kretsar utan begynnelseenergi

- Resistans ⟨fig1⟩

$$i(t) \quad \supset \quad I(s)$$

$$u(t) \quad \supset \quad U(s)$$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$U(s) = R \cdot I(t)$$

- Induktans ⟨fig2⟩

$$u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$U(s) = L\,(s\,I(s) - i(0))$$

  Ingen begynnelseenergi $\Rightarrow i(0) = 0$.

$$U(s) = s\,L \cdot I(s)$$

- Kapacitans ⟨fig3⟩.

$$i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$I(s) = C[s\,U(s) - u(0)]$$

  Ingen begynnelseenergi: $u(0) = 0$.

$$I(s) = s\,C\,U(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{s\,C} \cdot I(s)$$

- Källor. Transformeras enligt "transformtabell". Exempel: ⟨fig4⟩.

Andra viktiga signaler:

- Impuls ⟨fig5⟩
- Enhetssteg ⟨fig6⟩

EXEMPEL ⟨fig7⟩ Beräkna $i(t)$.

a) $v_s(t) = \delta(t) \cdot V_0$

b) $v_s(t) = \theta(t) \cdot V_0$

Laplacetransformera kretsen ⟨fig8⟩.

$$V_s = I\left(R + \frac{1}{sC}\right)$$

$$I(s) = \frac{V_s}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{V_s}{R} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{V_s}{R} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{T}}$$

där $T = RC$ (kretsens tidskonstant, $[T] = \mathrm{s}$).

a)

$$v_s(t) = \delta(t)\, V_0 \quad \supset \quad V_0$$

$$I(s) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{T}}$$

Inverstransformera

$$I(s) = \frac{V_0}{R}\left(\frac{s + \frac{1}{T} - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}\right) = \frac{V_0}{R}\left(1 - \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}\right)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\,\delta(t) - \frac{1}{T}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}$$

Grafiskt ⟨fig9⟩.

b)

$$v_s(t) = \theta(t)\, V_0 \quad \supset \quad \frac{V_0}{s}$$

$$I(s) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

Inverstransformera:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geqslant 0$$

Nät med begynnelseenergi

I dessa har vi uppladdade kapacitanser och/eller strömförande induktanser vid $t = 0$.

- Kapacitans ⟨fig10⟩. Begynnelsespänning $u(0) = u_0$.

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = u_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Laplacetransformera sambandet:

$$U(s) = \frac{u_0}{s} + \frac{1}{C\,s} I(s)$$

Vi får ⟨fig11⟩.

- Induktans ⟨fig12⟩. Begynnelseström $i(0) = i_0$.

$$u(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$U(s) = L\,(s\,I(s) - i_0)$$

$$U(s) = s\,L\,I(s) - L\,i_0$$

Vi får ⟨fig13a⟩. Tvåpolsomvandla (Thevenin/Norton) ⟨fig13b⟩.

Exempel ⟨fig14⟩. Beräkna strömmen $i(t)$. Kapacitansens begynnelsespänning $u_c(0) = u_0 = 10\mathrm{V}$. $R = 10\Omega, L = 1\mathrm{mH}, C = 10\mu\mathrm{F}$. Laplacetransformera kretsen ⟨fig15⟩.

Vi kan teckna strömmen direkt:

$$I(s) = \frac{\frac{u_0}{s}}{R + s\,L + \frac{1}{s\,C}} = \frac{u_0}{s^2 L + s\,R + \frac{1}{C}} = \frac{\frac{u_0}{L}}{s^2 + s\,\frac{R}{L} + \frac{1}{L\,C}}$$

Med numeriska värden

$$I(s) = \frac{10^4}{s^2 + 10^4\,s + 10^8}$$

Sök rötter:

$$s_{1,s} = -\,5000 \pm \mathrm{i}\,8660$$

Komplexa rötter — kvadratkomplettera.

$$I(s) = \frac{10^4}{(s + 5000)^2 - 5000^2 + 10^8} = \frac{10^4}{(s + 5000)^2 + 75 \cdot 10^6} = \frac{10^4}{8660} \cdot \frac{8660}{(s + 5000)^2 + 8660^2}$$

Invers transform ger

$$i(t) = 1.15 \sin(8660\,t) \cdot \mathrm{e}^{-5000t} \cdot \theta(t)$$

Nytt exempel. Krets med begynnelseenergi ⟨fig16⟩.

Stationärtillstånd råder då brytaren öppnas vid $t = 0$. Beräkna strömmen $i(t)$.

$E = 10\,\mathrm{V}, \quad R = 20\,\Omega, \quad L = 1\,\mathrm{mH}, \quad C = \mu\mathrm{F}$.

Kapacitansens begynnelsespänning är E.

Induktansens begynnelseström är $\frac{E}{R}$. Vi tittar på $t \geqslant 0$. Laplacetransformera kretsen. ⟨fig17⟩.

Teckna strömmen direkt.

$$I(s) = -\,\frac{\frac{E}{s} + \frac{L\,E}{R}}{R + s\,L + \frac{1}{s\,C}}$$