Speciell relativitetsteori — inlämningsuppgift 2

Christian von Schultz

2006–11–29

1 Tre satser

Vi definierar en rumslik vektor $\mathbf{A}$ som en vektor som har $\mathbf{A}^2 < 0$; en tidslik vektor har $\mathbf{A}^2 > 0$ och en ljuslik har $\mathbf{A}^2 = 0$. Vektorer med $\mathbf{A}^2 \geq 0$ kallas kausala.

Alla fyrvektorer ortogonala till en given kausal vektor är rumslika utom den kausala vektorn själv om den är ljuslik.

Påståendet är uppenbart falskt. För att se detta kan vi betrakta nollvektorn $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$. Den är enligt definitionen ovan kausal, samtidigt som alla fyrvektorer är ortogonala till nollvektorn. Men alla fyrvektorer är inte rumslika $\Rightarrow$ påståendet var falskt.

Vi kan också se att påståendet är falskt genom att betrakta en ljuslik vektor $\mathbf{K}$. Nu säger påståendet att alla vektorer ortogonala mot $\mathbf{K}$ förutom $\mathbf{K}$ själv är rumslika. $\mathbf{K}$ är ortogonal med sig själv och ändå ljuslik, så det fallet undantas från explicit satsen. Men betrakta $\alpha\mathbf{K}$: det blir en från $\mathbf{K}$ skild (om $\alpha \neq 1$), ljuslik vektor, som är uppenbart ortogonal med $\mathbf{K}$. Därmed har vi hittat oändligt många vektorer som motbevisar påståendet.

Därmed är saken egentligen utagerad, falska påståenden är ointressanta. Men man skulle kunna fundera över när det eventuellt skulle kunna gälla.

Antag att $\mathbf{K}$ är tidslik. $\mathbf{K}$ kan då skrivas på formen $\mathbf{K} = (0,0,0,\kappa), \kappa \in \mathbb{R}$ i något inertalsystem. Betrakta vektorn $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ som är ortogonal mot $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{K} \implies \mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = 0 \implies A_4 \kappa = 0$$

$$\implies \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, 0) \implies \mathbf{A}^2 = -A_1^2, -A_2^2 - A_3^2 \leq 0$$

Därmed är $\mathbf{A}$ antingen rumslik eller nollvektorn.

Påståendet kan därmed modifieras till att alla nollskilda fyrvektorer ortogonala mot en given tidslik vektor är rumslika.

Antag sedan att $\mathbf{K}$ är ljuslik och nollskild, och betrakta vektorer $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ som är ortogonala mot $\mathbf{K}$ *utan* att vara parallella mot $\mathbf{K}$. Vi kan genom lämpligt val av koordinatsystem skriva $\mathbf{K}$ på formen $\mathbf{K} = (N, 0, 0, N)$.

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{K} \implies \mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = 0 \implies N(A_4 - A_1) = 0 \implies A_1 = A_4$$

$$\implies \mathbf{A}^2 = A_4^2 - A_3^2 - A_2^2 - A_1^2 = -(A_2^2 + A_3^2) \leq 0$$

Om A_2 och/eller A_3 är nollskild blir $\mathbf{A}$ en rumslik vektor. Om båda är noll blir $\mathbf{A} = (A_1, 0, 0, A_1)$ och därmed parallell med $\mathbf{K}$.

Då är vi klara att modifiera påståendet till att gälla så många fall som möjligt, men inga fler (nödvändiga förändringar från originalformuleringen kursiverade):

Alla *nollskilda* fyrvektorer ortogonala till en given *nollskild* kausal vektor är ortogonala, utom *vektorer parallella med* den kausala vektorn själv om den är ljuslik.

Summan och skillnaden av godtyckliga rumslika vektorer är rumslika om vektorerna är ortogonala.

Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två godtyckliga, rumslika vektorer, och låt α och β vara godtyckliga nollskilda reella tal. Vi vill visa att $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^2 < 0$.

$$(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^2 = \alpha^2\mathbf{A}^2 + \beta^2\mathbf{B}^2 + \underbrace{2\alpha\beta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}_{=0 \text{ ty } \mathbf{A}\perp\mathbf{B}} = \alpha^2\mathbf{A}^2 + \beta^2\mathbf{B}^2 < 0$$

ty $\mathbf{A}^2 < 0$, $\mathbf{B}^2 < 0$, $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$. Härur följer påståendet trivialt.

Varje fyrvektor kan beskrivas som summan av två ljuslika vektorer. Om $\mathbf{A}$ är en godtycklig vektor, kan vi genom lämpligt val av referenssystem få den på formen $\mathbf{A} = (A_1, 0, 0, A_4)$. Skulle vi inte ha noll i "mittenkoordinaterna" från början går det att åstadkomma genom att titta på ett nytt referenssystem som skiljer sig från det ursprungliga med en rotation i rummet. Nu ska vi låta A_1 och A_4 variera hur de vill och visa att vi kan hitta två ljuslika vektorer vars summa blir $\mathbf{A}$. Det kommer att räcka att betrakta ljuslika vektorer som i det aktuella referenssystemet kan skrivas $(\pm A_4, 0, 0, A_4)$.

Tag då de båda ljuslika vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 0, 1)$. Eftersom $(1, 1)$ och $(-1, 1)$ spänner $\mathbb{R}^2$ (och mängden av alla möjliga $\mathbf{A}$ motsvarar $\mathbb{R}^2$ genom $(A_1, 0, 0, A_4) \leftrightarrow (A_1, A_4)$) står det klart att varje $\mathbf{A}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ enligt $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$. Därmed kan den godtyckliga vektorn $\mathbf{A}$ skrivas som summan av de båda ljuslika vektorerna $\alpha\mathbf{v}_1$ och $\beta\mathbf{v}_2$, vilket gör att påståendet gäller i det valda referenssystemet. Eftersom fyrvektorer är kovarianta under Poincarétransformationer gäller slutsatsen allmänt.

2 Tre baser

Fyra linjärt oberoende tidslika vektorer

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (1,0,0,2) \\ \mathbf{v}_2 = (0,1,0,2) \\ \mathbf{v}_3 = (0,0,1,2) \\ \mathbf{v}_4 = (0,0,0,1) \end{cases}$$

Kvadraterna på vektorerna blir 3 respektive 1: större än noll, alltså är vektorerna tidslika. Man kan också konstatera att de är linjärt oberoende, t.ex. genom att tänka på dem som vektorer i $\mathbb{R}^4$, sätta ihop dem till en matris och bilda determinanten, som blir nollskild (den blir ett), alltså är de linjärt oberoende.

Fyra linjärt oberoende rumslika vektorer

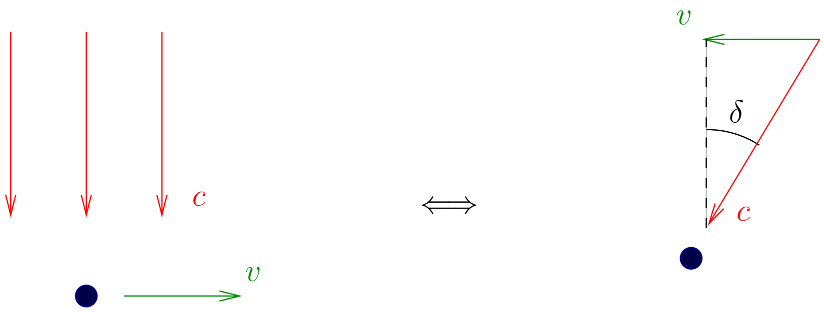
$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (2,0,0,1) \\ \mathbf{v}_2 = (0,2,0,1) \\ \mathbf{v}_3 = (0,0,2,1) \\ \mathbf{v}_4 = (1,0,0,0) \end{cases}$$

Kvadraterna blir här -3 respektive -1: mindre än noll, alltså är vektorerna rumslika. Liksom ovan kan vi determinantvägen inse att de är linjärt oberoende; determinanten blir $-4 \neq 0$.

Fyra linjärt oberoende ljuslika vektorer

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (1,0,0,1) \\ \mathbf{v}_2 = (0,1,0,1) \\ \mathbf{v}_3 = (0,0,1,1) \\ \mathbf{v}_4 = (-1,0,0,1) \end{cases}$$

Kvadraterna blir här noll — vektorerna är ljuslika. Determinanten blir $2 \neq 0$; de är linjärt oberoende.



Figur 1: *Jordens hastighet i sin bana är så pass mycket mindre än ljusets, att man med gott samvete kan göra en pseudo-Gallileisk transformation, där man noterar att ljushastigheten är konstant.*

3 En fixstjärnas aberration

Aberrationen, som orsakas av att jorden rör sig i en bana runt solen, gör att en fixstjärna vars ljus infaller vinkelrätt mot jordens banplan kommer att beskriva en cirkel på himlavalvet. Vi vill beräkna denna cirkels radie.

Fixstjärnor är ett modellbegrepp som dyker upp i Newtons universum när man använder sig av det absoluta referenssystemet, det inertialsystem som har solen i centrum. Fixstjärnor ligger oändligt långt borta och rör sig inte. (Så beter sig naturligtvis inte riktiga stjärnor, men det är ändå en användbar modell i detta sammanhang.)

Himlavalvet är det som observeras från jorden, när man tagit hänsyn till jordens rotation kring sin egen axel och korrigerat bort den från sina mätningar. Om man ersätter jorden med en punktformig observatör som inte roterar relativt det absoluta referenssystemet skulle denna observera just himlavalvet. Jordbanan kan med mycket god noggrannhet approximeras med en perfekt cirkel, med radien $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Detta ger en hastighet i banan på

$$v = \frac{2\pi R}{1\,\text{år}} \approx 30\,000\,\text{m/s} \ll c = 299\,792\,458\,\text{m/s}$$

Vi ser här att det inte finns någon anledning att räkna relativistiskt.

Om jorden rör sig framåt med hastigheten $\boldsymbol{v}$ och möter ljus rakt ovanifrån, är det enligt relativitetspostulatet ekvivalent med att jorden står still och ljuset kommer in snett ovanifrån, med en liten avvikelse δ från vertikalen (vi befinner oss då i jordens momentana inertialsystem). Se vidare figur 1. Ljuset har den totala hastigheten c, varvid den har en “horisontell” komponent med storlek v. Avvikelsen fås då enligt

$$\delta = \arcsin \frac{v}{c} \approx 9.96 \cdot 10^{-5} \text{ eller } 0°0'21''$$

Allteftersom jorden framskrider i sin bana kommer riktningen på $\boldsymbol{v}$ att ändras, vilket gör att riktningen på ljuset i det momentana inertialsystemet kommer att rotera runt vertikalen, hela tiden med en avvikelse (aberration) på knappa 21 bågsekunder. Detta blir alltså radien på den cirkel som fixstjärnan beskriver, sedd från jorden.

4 ... och så den krångliga uppgiften

Om en punkt rör sig i en hyperbolisk rörelse (konstant egenacceleration α), vilket vi i något inertialsystem S kan uttrycka som

$$x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

har den (i sitt momentana inertialsystem) konstant avstånd till den punkt som här valdes till origo i S-systemet. Vi kan konstatera detta genom att bilda fyrvektorn $\Delta\mathbf{s}$ från S-origo till punkten,

$$\Delta\mathbf{s} = (x, 0, 0, ct), \qquad \Delta\mathbf{s}^2 = c^2t^2 - x^2 = -\frac{c^4}{\alpha^2}$$

Vi ser att $\Delta\mathbf{s}^2$ blev en konstant, oberoende av tiden. Den blev negativ, vilket betyder att den är rumslik. Det innebär att det finns ett inertialsystem där den är riktad uteslutande i rummet, och blir där ett mått på avståndet (är dess negativa kvadrat). Vidare kan vi konstatera att partikeln måste ha hastigheten noll i det inertialsystem där $\Delta\mathbf{s}$ saknar tidskomponent. För att se detta kan vi t.ex. derivera:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\mathbf{s}^2 = c^2 \cdot 2t - 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

I ett system där $\Delta\mathbf{s}$ saknar tidskomponent har vi $t = 0$ och

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ ty } x = 0 \Rightarrow \Delta\mathbf{s} = \mathbf{0} \text{ och vi hade } \Delta\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$$

Alltså: det finns vid varje given tidpunkt ett inertialsystem där $\Delta\mathbf{s}$ är saknar tidskomponent, och i ett inertialsystem där $\Delta\mathbf{s}$ saknar tidskomponent måste partikelns hastighet vara noll. Detta blir därmed det momentana inertialsystemet. Eftersom $\Delta\mathbf{s}^2$ är konstant genom hela rörelsen, och eftersom det är direkt relaterat till avståndet till S-origo, följer att avståndet till S-origo (i det momentana inertialsystemet) hela tiden är konstant.

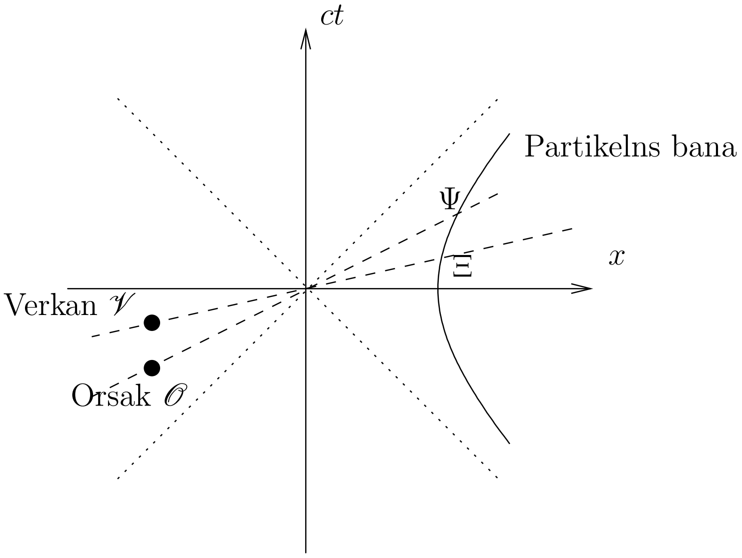
Det som ovan är sagt om S-origo skulle enligt uppgiftstexten gälla för någon punkt "rakt bakom" partikeln, i det momentana inertialsystemet. Återstår att visa att S-origo verkligen är rakt bakom partikeln. Eftersom en punktpartikel saknar både fram- och baksida är det inte helt klart vad vi ska mena med "bakom". Normalt sett skulle man väl i det läget tittat på hastigheten, och sagt framåt är i hastighetens positiva riktning — men påståendet gäller specifikt i det momentana inertialsystemet, där hastigheten är noll. Så vi tvingas ta till accelerationen, och kan konstatera att partikeln avlägsnar sig från S-origo då $\alpha > 0$, vilket vi kan anta utan inskränkning, genom lämpligt val av koordinatsystem S. Således ligger S-origo bakom partikeln.

Konstant avstånd till en viss punkt, i de momentana inertialsystemen. Samtidigt rör partikeln sig framåt med allt högre fart. Hur går det ihop?

När vi talar om en serie momentana inertialsystem försöker vi mer eller mindre skapa ett medföljande referenssystem. Det är i detta system som partikeln har konstant avstånd till punkten och i detta system rör sig partikeln *inte* framåt med allt högre fart (den står still i ett medföljande system, per definition). På samma sätt gäller i alla inertialsystem att partikeln *inte* har konstant avstånd till den aktuella punkten. Så det enkla svaret är att det går inte ihop. Antingen ser man det som att avståndet är konstant, eller så ser man det som att partikeln rör sig framåt med allt högre fart. Likväl kan man förundras över att S-origo inte rör sig bakåt med allt högre fart i det medföljande systemet, såsom det hade varit i ett Newtonskt system. Det är här som samtidighetens relativitet och rumtidens förenande av rum och tid kommer in. Att växla över till ett "snabbare" inertialsystem, betyder att punkter längre bak betraktas vid allt tidigare tillfällen ju längre bak man kommer, och att punkter längre fram betraktas vid allt senare tillfällen, relativt hur det var innan man bytte system. Situationen kan visualiseras i ett Minkowski-diagram enligt figur 2.

I figuren ser vi också att det, med det momentana samtidighetsbegreppet, finns en region i Minkowskirummet där händelser $\mathscr{O}$ och $\mathscr{V}$ är samtidiga med händelser Ψ och Ξ som sker i omvänd tidsordning. (Notera dock att detta bara gäller i det accelererande systemet; i varje givet inertialsystem sker orsak före verkan.) Accelerationen får en "roterande samtidighet" till följd.

Hyperbeln kommer närma sig den inritade ljuskonen asymptotiskt, men aldrig gå över den. Det framgår också att ljuskoner som utgår från partikeln, aldrig kommer att kunna innehålla punkter $\mathscr{O}$ eller $\mathscr{V}$. Det betyder att signaler från dessa händelser aldrig kan nå fram till den accelererande partikeln, de befinner sig bakom en händelsehorisont.



Figur 2: *Banan för en partikel med konstant egenacceleration.* Ξ *och* Ψ *är två händelser på partikelns bana, där* Ξ *händer före* Ψ*. De punktade linjerna motsvarar en signal genom* S*-origo som rör sig i ljushastigheten. De streckade linjerna markerar alla de händelser som i partikelns momentana inertialsystem är samtidiga med* Ξ *respektive* Ψ*. Inritat är också en händelse* $\mathscr{O}$ *som orsakar en verkan* $\mathscr{V}$*. I partikelns momentana inertialsystem är* Ξ *och* $\mathscr{V}$*, respektive* Ψ *och* $\mathscr{O}$*, samtidiga.*

Vad ser då den accelererade observatören (nu har partikeln fått ögon), när den betraktar ett objekt som står still i S? Jo, längdkontraktionen kommer bli allt mer uttalad med tiden. Då tiden går mot oändligheten kommer det stillastående objektet oavsett ursprunglig utsträckning att bli allt mer punktformat. På samma sätt kommer tidsdilatationen att bli allt mer uttalad med tiden. När partikelns tid går mot oändligheten kommer det stillastående objektets tid att sakta in och stanna. Bortom det ögonblick som det stillastående objektets klocka stannat hamnar den utanför alla möjliga ljuskoner för partikeln; hamnar bakom dess horisont. Vi kan också vänta oss att det stillastående objektet lyser allt svagare när vi närmar oss denna horisont — objektet avger/reflekterar en viss mängd energi per tidsenhet mätt med dess egen klocka (vilken som sagt stannar betraktat från partikeln).