Speciell relativitetsteori — inlämningsuppgift 1

Christian von Schultz

2006–11–14

1 Lorentztransformationen och rapiditeten

Att visa: Lorentztransformationen

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ t' = \gamma(v)(t - vx) \end{cases}, \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{1}$$

(med $c = 1$) kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{2}$$

där ϕ är den s.k. rapiditeten. (Se även avsnitt A.2.) Relationen mellan ϕ och v ska bestämmas. (Om en sådan relation kan bestämmas har vi automatiskt visat att Lorentztransformationen kan skrivas som i (2).)

(1) kan skrivas som en ekvivalent vektor-matris-ekvation enligt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Detta är uppenbart ekvivalent med (2) om de båda matriserna är lika, vilket ger oss

$$\begin{cases} \gamma = \cosh\phi \\ -v\gamma = -\sinh\phi \end{cases}$$

vilket medför (se avsnitt A.1) att

$$\phi = (\operatorname{sgn} v)\,\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right) \tag{3}$$

Skrivet på den här formen ser man tydligt sambandet mellan farten och beloppet på ϕ, och vi ser också att ϕ är negativ om och endast om v är negativ. Vi ser också att $\phi \to \pm\infty$ då $v \to \pm 1 = \pm c$, dvs en hastighet kan inte vara högre än c. Alla ändliga reella ϕ ger ett $v \in]-c,c[$, medan en oändlig rapiditet svarar precis mot ljushastigheten.

Vi skulle också kunna passa på att konstatera att $v = \tanh\phi$ och därmed $\phi = \tanh^{-1} v$. Även om den kanske är lite lättare att genomskåda när den skrivs som (3), kommer somliga räkningar att bli lättare när man håller sig till de hyperboliska funktionerna.

2 Två successiva Lorentztransformationer

Att visa: två successiva Lorentztransformationer med hastigheter i x-led, sådana som beskrivs av (1), motsvarar en Lorentztransformation med en rapiditet som är summan av de två rapiditeterna. Dessutom visas "additionsformeln" för parallella hastigheter.

Låt v_1 och ϕ_1 vara hastigheten respektive rapiditeten i den första Lorentztransformationen, som tar oss från (x,t) till (x',t'). Sedan gör vi en ny Lorentztransformation med v_2 och ϕ_2 som tar oss från (x',t') till (x'',t''). Låt $\mathbb{L}(\phi)$ beteckna matrisen i (2). Vi har då

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \mathbb{L}(\phi_2)\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \mathbb{L}(\phi_2)\mathbb{L}(\phi_1)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \mathbb{L}(\phi_1+\phi_2)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L}(\phi_2)\mathbb{L}(\phi_1) = \begin{pmatrix} \cosh\phi_2 & -\sinh\phi_2 \\ -\sinh\phi_2 & \cosh\phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\phi_1 & -\sinh\phi_1 \\ -\sinh\phi_1 & \cosh\phi_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\phi_1\cosh\phi_2 + \sinh\phi_1\sinh\phi_2 & -\cosh\phi_1\sinh\phi_2 - \cosh\phi_2\sinh\phi_1 \\ -\cosh\phi_1\sinh\phi_2 - \cosh\phi_2\sinh\phi_1 & \cosh\phi_1\cosh\phi_2 + \sinh\phi_1\sinh\phi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1+\phi_2) & -\sinh(\phi_1+\phi_2) \\ -\sinh(\phi_1+\phi_2) & \cosh(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix} = \mathbb{L}(\phi_1+\phi_2)$$

Rapiditeterna får alltså adderas vid upprepade Lorentztransformationer. För hastigheterna får vi en lite besvärligare "additionsformel":

$$v = \tanh(\phi_1+\phi_2) = \frac{\tanh\phi_1 + \tanh\phi_2}{1+\tanh\phi_1\tanh\phi_2} = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$$

där vi använt $v = \tan\phi$ och additionsformeln för hyperbolisk tangens. Vill man inte att ljushastigheten ska vara ett får man göra dimensionsanalys och finner

$$\boxed{v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}}$$

3 Många successiva Lorentztransformationer

Att visa: Formeln för hastigheten v_{tot} som erhålls då hastigheten v adderas relativistiskt med sig själv n gånger.

Låt hastigheten v svara mot rapiditeten ϕ ($v = \tanh\phi$ i enlighet med vad som visades i avsnitt 1). Om ϕ_{tot} är rapiditeten som svarar mot sluthastigheten v_{tot}, följer av föregående avsnitt $\phi_{\text{tot}} = n\phi$. Om vi utnyttjar (3) kan vi göra följande lilla räkning, vars syfte snart kommer framgå tydligt:

$$\left(\mathrm{e}^{\phi}\right)^n \mp \left(\mathrm{e}^{-\phi}\right)^n = \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{n}{2}} \mp \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{n} \mp 1\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(1+v)(1-v)}}\right)^{n} \left((1+v)^n \mp (1-v)^n\right) = \gamma^n \left((1+v)^n \mp (1-v)^n\right)$$

Vi är ute efter $v_{\text{tot}} = \tanh(n\phi)$. Enligt definitionen av tangens hyperbolicus:

$$v_{\text{tot}} = \tanh(n\phi) = \frac{\mathrm{e}^{n\phi} - \mathrm{e}^{-n\phi}}{\mathrm{e}^{n\phi} + \mathrm{e}^{n\phi}} = \frac{(1+v)^n - (1-v)^n}{(1+v)^n + (1-v)^n}$$

I avsnitt 1 visade vi att varje ändlig reell rapiditet svarar mot en hastighet mindre än ljushastigheten. Då v understiger ljushastigheten svarar den mot rapiditeten ϕ, som är ändlig och reell. Då måste även $n\phi$ vara en ändlig, reell rapiditet och motsvarande hastighet v_{tot} ovan är därmed en hastighet mindre än ljushastigheten.

4 En cylinder med snurr

I inertialsystemet S' ligger en cylinder och snurrar med vinkelhastigheten ω_0. Cylindern snurrar kring sin axel, som råkar vara precis x'-axeln. Cylindern kan naturligtvis ha vilka färger och mönster som helst, men det kan hjälpa det inre ögat om vi föreställer oss att den är randig. Långa, raka, parallella ränder i valfri färg.

Inertialsystemet S' rör sig med hastigheten v relativt inertialsystemet S. De båda befinner sig i standardkonfiguration. En observatör sitter på en bänk i S och tittar på den förbifarande cylindern och konstaterar att ränderna inte alls är raka, utan mer spiralformade. Cylindern är vriden, åt andra hållet relativt ω_0. Vridningen per längdenhet i x-riktning uppgår till $\gamma\omega_0 v/c^2$. Hur kan detta komma sig?

Att S och S' befinner sig i standardkonfiguration betyder att vi kan ta oss från den ena till den andra med Lorentztransformationen

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Observatören i S tittar på cylindern vid någon given tidpunkt; så länge cylindern snurrar på samma sätt beter den sig på samma sätt, så vi kan utan inskränkning välja denna tidpunkt till $t = 0$. Vi får då

$$\begin{cases} x' = \gamma x \\ t' = \gamma \frac{v}{c^2} x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad t' = -\frac{v}{c^2}x' \tag{4}$$

Låt oss nu lämna observatören på bänken bakom oss och följa med cylindern i S'. Vi ser nu att observatören på bänken inte tittade på hela cylindern samtidigt, han betraktade cylinderns främre del *tidigare* än den bakre. Då har ju den bakre hunnit snurra längre när han väl kommer till den. Inte undra på att han tycker den är vriden! (Notera dock att han tittade på hela cylindern vid samma tidpunkt betraktat från S, men samtidighet är ju relativt.)

Låt φ' vara den vinkel som beskriver läget för en given punkt på cylindern under dess cirkulära bana kring x'-axeln, mätt från någon given referens $\varphi' = 0$. Vi har då

$$\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t'} = \omega_0$$

Enligt (4) har vi:

$$\mathrm{d}t' = -\frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi'}{-\frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'} = \omega_0 \implies \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}x'} = -\omega_0 \frac{v}{c^2}$$

$\mathrm{d}\varphi'$ ges av $(y'^2 + z'^2)\mathrm{d}\varphi'^2 = \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2$ (Pythagoras' sats och båglängdsformeln). Då $y = y'$ och $z = z'$ har vi även $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi'$. Av (4) följer sedan $\mathrm{d}x' = \gamma \mathrm{d}x$, vilket sammantaget ger

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\gamma\omega_0 \frac{v}{c^2}$$

Detta är precis vridingen per längdenhet i x-riktningen, sett i S. Både storlek och riktning stämmer överens med vad som skulle visas.

Rent allmänt när ett system med i vila synkroniserade klockor (eller motsvarande tidsberoende experiment) betraktas från ett system som rör sig med en hastighet v i förhållande till klockorna, så kommer den främsta klockan visa den tidigaste tiden, med gradvis senare tidpunkter ju längre bak i klock-konstellationen man kommer (det är precis det som (4) säger). Det hela har sin grund i att samtidighetsbegreppet är relativt; tid och rum är inte helt fristående från varandra.

A Extra härledningar

A.1 ϕ som funktion av v

Löser ut ϕ ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} \gamma = \cosh\phi \\ v\gamma = \sinh\phi \end{cases}$$

Ur den första ekvationen följer

$$\phi = \pm\cosh^{-1}\gamma = \pm\ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right) = \pm\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \sqrt{\frac{1}{1-v^2} - 1}\right) =$$

$$= \pm\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(1 + \sqrt{1-(1-v^2)}\right)\right) = \pm\ln\frac{1+|v|}{\sqrt{1-|v|}\sqrt{1+|v|}} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right)$$

Ur den andra ekvationen följer

$$\phi = \sinh^{-1} v\gamma = \ln\left(v\gamma + \sqrt{v^2\gamma^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + \sqrt{\frac{v^2}{1-v^2} + 1}\right) =$$

$$= \ln\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right)^{\operatorname{sgn} v} = (\operatorname{sgn} v)\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right)$$

Att dessa ska gälla samtidigt innebär[1] att

$$\phi = (\operatorname{sgn} v)\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|v|}{1-|v|}\right)$$

[1]Bara för att retas: Se bokens ekv. (3.11)

A.2 ...fast γ var ju strikt talat inte given i uppgiften

I avsnitt 1 utnyttjade vi γ, men egentligen var den inte given. I uppgiften hade vi bara

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ t' = \gamma(v)(t - vx) \end{cases}$$

samt vetskapen om att den beskriver en Lorentztransformation. Det säger oss att man måste ha satt $c = 1$ (annars stämmer inte enheterna), och att det är en transformation som respekterar postulaten i Einsteins speciella relativitetsteori. Utifrån detta söker vi $\gamma(v)$. S och S' är i standardkonfiguration.

Placera en enhetsstav med ena änden i origo i systemet S'. Betrakta den vid tidpunkten $t = 0$ i S. Vi har då

$$1 = \gamma\Delta x \implies \Delta x = \frac{1}{\gamma}$$

Placera sedan enhetsstaven med ena änden i origo i systemet S. Betrakta den vid tidpunkten $t' = 0$ i S'. Vi har då

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(1 - vt) \\ 0 = \gamma(t - v) \end{cases} \implies \Delta x' = \gamma(1 - v^2)$$

Enligt Einsteins relativitetspostulat har vi samma längdkontraktion i båda fallen, eftersom båda handlar om en enhetsstav med hastigheten v. Vi har alltså $\Delta x = \Delta x'$ och

$$\frac{1}{\gamma} = \gamma(1 - v^2) \implies \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}$$

$$\gamma = {\scriptstyle (}\pm{\scriptstyle)} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Att $\gamma > 0$ inses då vi vet att $v \to 0$ ska ge $\gamma \to 1$.