2006–12–11

Elektromagnetism: Maxwells ekvationer:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{e} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{b} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} \end{cases}$$

Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{f} = q\left(\boldsymbol{e} + \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b}}{c}\right)$$

Laddningen q är invariant.

4-krafter: Vi definierar

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0\mathbf{U}) = m_0\mathbf{A} + \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{U}$$

Vi kan också skriva

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{P} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}, mc) = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f}, \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)$$

Notera att effekten dök upp i fjärde komponent.

$$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}t}$$

är den relativistiska 3-kraften.
Vidare har vi

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = c^2\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau} = (\gamma(u))^2\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\right)$$

För krafter som bevarar vilomassan har vi $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = 0$, eller $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$, eller

$$\mathbf{F} = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f}, \frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}}{c}\right)$$

och

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}, \quad m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} - \frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}}{c}\boldsymbol{u}$$

Lorentztransformation av $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \gamma(u)\left(\boldsymbol{f}, \frac{1}{c}Q\right)$$

ger dels

$$F_1' = \gamma(v)\left(F_1 - \frac{v}{c}F_4\right)$$

och dels

$$\gamma(u')f_1' = \gamma(v)\gamma(u)\left(f_1 - \frac{vQ}{c^2}\right)$$

Använd transformationen av $\gamma(u)$ (kapitel 3)

$$\frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(v)\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)$$

$$f_1' = \frac{f_1 - \frac{vQ}{c^2}}{1 - \frac{vu_1}{c^2}}$$

$$f_2' = \frac{f_2}{\gamma(v)(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}$$

$$f_3' = \frac{f_3}{\gamma(v)(1 - \frac{u_1 v}{c^2})}$$

$$Q' = \frac{Q - vf_1}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}$$

Observera:

- $\boldsymbol{f}$ är inte invariant.
- $c \to \infty$ ger $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f}$.
- transformationen av $\boldsymbol{f}$ beror på $\boldsymbol{u}$, det påverkade objektets hastighet.
- hastighetsoberoende krafter är ej relativistiska.

Lorentzkraften beror linjärt på $\boldsymbol{u}$. Vilken är den enklast tänkbara rumtids- eller 4-tensorformen?

$$F^\mu = A^\mu{}_\nu U^\nu \quad \text{(Skiss)}$$

Antag q invariant, släng in ett c och sänk ett index:

$$F_\mu = \frac{q}{c}E_{\mu\nu}U^\nu$$

$E_{\mu\nu}$: den elektromagnetiska fälttensorn