2006–12–07

Elektromagnetism

Vektorer. Allmän definition: ett objekt med komponenter A^i i $\{x^i\}$ samt $A^{i'}$ i $\{x^{i'}\}$ är en **vektor** om, under transformationen $\{x^i\} \to \{x^{i'}\}$.

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{ij}} A^j, \quad \text{(kontravariant vektor)}$$

$$A_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} A_j, \quad \text{(kovariant vektor)}$$

Gäller

- Alla typer av (metriska) rum (speciellt i alla dimmensioner) V_N, där N är dimensionen.
- Alla koordinattransformationer (tillräckligt deriverbara, icke-signulära)

Angående index:
Exempel:

$$A_i B^i = \sum_{i=1}^{N} A_i B^i, \quad \text{(Einsteins summationskonvention)}$$

$$\text{“}\frac{1}{A^i} = B_i\text{”}, \quad \text{“}\frac{1}{A_i} = B^i\text{”}$$

Index avgör koordinatsystem. $x^{i'} \in S', x^{i''} \in S''$
Specifika komponenter skrivs ibland $A_{3'}, A'_3$
När man skriver

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} A^i$$

kallas i' fritt index, i summerat/dummy-index.
Exempel: Lorentztransformationen:

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \gamma(v)$$

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^4} = -\gamma(v)$$

$$A^{1'} = \gamma(v)\left(A^1 - \frac{v}{c}A^4\right)$$

Förkortning:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = p_j{}^{i'}$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = p_{i'}{}^j$$

$$p^{i'}_{ij} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$p^i_{i'} p^{i'}_{i''} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} = p^i_{i''}$$

$$p^i_{i'} p^{i'}_j = \delta^i_j$$

Tensorer. DEFINITION: Ett objekt med komponenter $A^{ij\ldots n}$ i $\{x^i\}$ och $A^{i'j'\ldots n'}$ i $\{x^{i'}\}$ är en $*$ tensor om, under $\{x^i\} \to \{x^{i'}\}$

$$A^{i'j'\ldots n'} = A^{ij\ldots n} p^{i'}_i p^{j'}_j \cdots p^{n'}_n, \quad * = \text{kontravariant}$$

($A_{ij\ldots n}$ och $A_{i'j'\ldots n'}$)

$$A_{i'j'\ldots n'} = A_{ij\ldots n} p^i_{i'} p^j_{j'} \cdots p^n_{n'}, \quad * = \text{kovariant}$$

$A^{i\ldots k}_{l\ldots n}$, $A^{i'\ldots k'}_{l'\ldots n'}$

$$A^{i'\ldots k'}_{l'\ldots n'} = A^{i\ldots k}_{l\ldots m} p^{i'}_i \cdots p^{k'}_k p^l_{l'} \cdots p^n_{n'}$$

Detaljer:

- antal index = tensorns rang (1-tensor = vektor, 2-tensor, ...)
- i en punkt i V_n så är p konstanter (tensortransformationen är linjär)
- För en linjär transformation $\{x^i\} \to \{x^{i'}\}$ så är p konstanter.
- Nolltensorn har alla komponenter lika med noll, i alla koordinatsystem.
- tensortransformationen är symmetrisk och associativ

Huvudsats:

$$A^{i\ldots k}_{l\ldots n} = B^{i\ldots k}_{l\ldots n} \Longleftrightarrow A^{i\ldots k}_{l\ldots n} - B^{i\ldots k}_{l\ldots n} = 0$$
$$\Longrightarrow A^{i'\ldots k'}_{l'\ldots n'} - B^{i'\ldots k'}_{l'\ldots n'} = 0$$

Tensorekvationer är oberoende av koordinatsystem.

Basexempel:

$$\mathrm{d}x^{i'} = p^{i'}_j \mathrm{d}x^j \quad \text{— kontravariant tensor}$$
$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad \text{— kovariant tensor}$$
$$\delta^i_j \quad \text{— blandad tensor}$$

Tensoralgebra

- Om A och B är tensorer så gäller

  $$C^{i\ldots}_{k\ldots} = A^{i\ldots}_{k\ldots} + B^{i\ldots}_{k\ldots}$$

  är en tensor (summa). Additionen utförs i samma punkt.

  $$C' = A' + B' = App\cdots + Bpp\cdots = (A+B)pp\cdots = Cpp\cdots$$

  Om vi inte betraktar samma punkt finns det risk att vi får olika konstanter p. (För linjära transformationer är det inget problem.)

- $$C^{ij}{}_{klm} = A^{ij}B_{klm}$$

  är en tensor (yttre produkt)

- $$B^j{}_{km} = A^{hj}{}_{khm}$$

  är också en tensor (kontraktion)

- $$C_{ikl} = A_{ij}B^j_{kl}$$

  är en tensor (inre produkt)

- $$B_{ijk} = A_{ikj}$$

  är en tensor (indexpermutation)

Derivator av tensorer:

$$A^{i\ldots k}_{l\ldots n,r} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(A^{i\ldots k}_{l\ldots n}\right)$$

Transformation ger

$$A^{i'\ldots k'}_{l'\ldots n',r'} = A^{i\ldots k}_{l\ldots n,r} p^{i'}_{i} \cdots p^{k'}_{k} p^{l}_{l'} \cdots p^{n}_{n'} p^{r}_{r'} + \text{derivator av } p$$

Derivatan av en tensor är i allmänhet inte en tensor!
Men ("ett stort och fröjdefullt *men* finns här"): För linjära koordinattransformationer så *är* det en tensor: derivatorna av p är alla noll.
Derivata ökar rangen med 1. $\partial\partial\partial\cdots\partial A$ är en tensor. En derivata med avseende på godtycklig skalär (invariant) är en tensor.

Metriken: DEFINITION:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \quad \text{(pseudo-Riemann)}$$

Generellt så är g en funktion av position i rummet. g är symmetrisk: $g_{ij} = g_{ji}$.
EXEMPEL: Ett N-dimensionellt euklidiskt rum: $g_{ij} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) = \delta_{ij}$
g är en tensor, metriktensorn.
Skalärprodukt i tensornotation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{ij}A^iB^j$.
Metriken ger oss ytterligare en tensoroperation:

$$A_i = g_{ij}A^j$$

$$A^i = g^{ij}A_j$$

Detta kallas att höja respektive sänka index.
g^{ij} är matrisinversen av g_{ij} och definieras av

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$$

(Utökat $A^{ij}{}_{kl} = g^{ir}g_{ks}g_{lt}A_r{}^{jst}$)
Viktiga saker att minnas:

- Ordningen på index spelar roll.
- Fria index måste balanseras.

4-tensorer (Lorentztensorer) V_N är Minkowskirummet. Tensorer *under* Poincarétransformationer. De skrivs $U^\mu, A^\mu, P^\mu, E_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$.

PT linjär $\implies$ Addition av 4-tensorer i *olika* punkter är en tensor. Derivator av 4-tensorer är tensorer.

Metriken:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

(Man skriver nästan alltid η för metriken i Minkowskirummet.)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu}$$

ger

$$A_i = g_{i\mu}A^\mu = -A^i \quad (i = 1,2,3)$$

$$A_4 = g_{4\mu}A^\mu = A^4$$

$$U^\mu = \gamma(u)\,(\boldsymbol{u}, c)\,, \quad U_\mu = \gamma(u)(-\boldsymbol{u}, c)$$