2006–11–30

Rörelsemängdsidentiteter. $\mathbf{P} = m_0\mathbf{U} = (\boldsymbol{p}, mc) = (\boldsymbol{p}, E/c)$

$$\implies \mathbf{P}^2 = m_0^2c^2 = m^2c^2 - p^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

Alltså $\mathbf{P}^2 = 0$ (dvs $\mathbf{P}$ är ljuslik) om och endast om $m_0 = 0$.

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2$$
$$\implies E^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2$$
$$p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = c^4(m^2 - m_0^2)$$

Tag två partiklar med vilomassor m_{01} och m_{02} samt $\mathbf{P}_1$ och $\mathbf{P}_2$ och relativ hastighet v_{12}. Vi får

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = m_{01}E_2 = m_{02}E_1 = c^2\gamma(v_{12})m_{01}m_{02}$$

Bevis. $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = (\mathbf{0}, c) \cdot (\boldsymbol{p}_2, E_2/c) = m_{01}E_2$. $\square$

Elastisk kollision: $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})^2 = (\mathbf{P}' + \mathbf{Q}')^2$, där $\mathbf{P}$ hör till partikel ett och $\mathbf{Q}$ hör till partikel två.

$$m_{01}^2c^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + m_{02}^2c^2 = m_{01}'^2c^2 + 2\mathbf{P}' \cdot \mathbf{Q}' + m_{02}'^2c^2$$

$$\implies \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{Q}'$$

$$\implies v_{12} = v_{12}' \quad \text{(Oberoende av } c\text{.)}$$

Exempel: Uppgift 5.2.

Information om "när" och "var" i *ett* inertialsystem $\implies$ lös *med* komponenter (inte *i* komponenter, *med* komponenter). ⟨fig1⟩.

$$S: \quad \begin{cases} ct = c\left(\tau_1 + \tau_2\right)/2 \\ x = c\frac{1}{2}\left(\tau_2 - \tau_1\right) \end{cases}$$

$$\Delta\mathbf{s} = \frac{c}{2}\left(\tau_2 - \tau_1, 0, 0, \tau_2 + \tau_1\right)$$

$$\Delta\mathbf{s}^2 = \frac{c^2}{4}\left[(\tau_2+\tau_1)^2 - (\tau_2-\tau_1)^2\right] = \frac{c^2}{4}\cdot 4\tau_1\tau_2 = c^2\tau_1\tau_2$$

Exempel: Uppgift 5.4. ($u > c$).

Definition:

$$\mathbf{U} = c\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}s} = c\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$c^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \left[\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 \implies \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} = c^2 - u^2\right.$$

$$\left.\implies \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|c^2 - u^2\right|^2 = (u^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}\right] = c^2\frac{1}{\sqrt{u^2-c^2}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}}$$

$$c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}}$$

$$\mathbf{U}^2 = \left(\frac{u^2}{c^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}, c) \implies \mathbf{U}^2 = \frac{c^2}{u^2-c^2}(c^2-u^2) = -c^2$$

Relativistisk biljard. Två punkter, varav en i vila, kolliderar elastiskt (labbsystemet).

Metod: lös i ett inertialsystem där problemet är enkelt, sedan transformera.

S': partiklarna har motsatta hastigheter $\pm v$ längs x'-axeln, innan stöten.

Energi och rörelsemängd bevarad $\implies$ $\pm v$ längs en annan axel *efter* stöten.

Labbsystemet S i standardkonfiguration med S', relativ hastighet $+v$ $\implies$ partikeln inkommande från höger är i vila.

Aberrationsformeln (invers)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(v)\left(\cos\theta' + 1\right)}$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta'}{\gamma(v)\left(-\cos\theta' + 1\right)}$$

$$\tan\theta\tan\phi = \frac{1}{(\gamma(v))^2}$$

Vi kollar på

$$\frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} = \gamma(v)\left(1 + \frac{u_1'v}{c^2}\right)$$

Applicera på vårt problem:

$$u' = u_1' = v, \quad \text{målet}$$

$$u = \tilde{v}, \quad \text{projektil}$$

$$\frac{\gamma(\tilde{v})}{\gamma(v)} = \gamma(v)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \implies \gamma(\tilde{v}) = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -1 + \frac{2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -1 + 2(\gamma(v))^2$$

$c \to \infty \implies \theta + \phi = \frac{\pi}{2}$. I relativitetsteorin har vi $\theta + \phi < \frac{\pi}{2}$.

Zero-momentum frame. Tag ett inertialsystem S med godtyckligt antal sporadiskt kolliderande partiklar i sig.

Vi definierar följande *momentana* summor:

Total massa: $\bar{m} = \sum m$.

Totala rörelsemängden: $\bar{\boldsymbol{p}} = \sum \boldsymbol{p}$.

Totala 4-rörelsemängden: $\bar{\mathbf{P}} = \sum \boldsymbol{P}$ är en 4-vektor.

Vidare är $\bar{\mathbf{P}}$ tidslik och framtidsriktad. $\implies$ Det finns ett inertialsystem där $\bar{\boldsymbol{p}} = \mathbf{0}$. Detta inertialsystem kallas *zero-momentum frame* S_{ZM}.

Vi har $\mathbf{U}_{\text{ZM}} = (\mathbf{0}, c)$ i S_{ZM}.

$\bar{\mathbf{P}} = (\mathbf{0}, \bar{m}_{\text{ZM}} c) = \bar{m}_{\text{ZM}} \mathbf{U}_{\text{ZM}}$.

$\mathbf{U}_{\text{ZM}}$ och $\bar{m}_{\text{ZM}}$ ger *systemets* massa och 4-hastighet.

Generellt (i godtyckligt S):

$$\bar{\mathbf{P}} = (\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{m}c) = \bar{m}_{\text{ZM}} \gamma(u_{\text{ZM}})(\boldsymbol{u}_{\text{ZM}}, c)$$

$$\bar{m} = \gamma(u_{\text{ZM}}) \bar{m}_{\text{ZM}}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{m}_{\text{ZM}} \boldsymbol{u}_{\text{ZM}}$$

$$\boldsymbol{u}_{\text{ZM}} = \frac{\bar{\boldsymbol{p}}}{\bar{m}_{\text{ZM}}}$$