2006–11–27

Planvågor I S $\langle$fig1$\rangle$. Ett plan, en sträcka p från $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = p$$

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = p$$

Δt är tiden från passage över P_0.

$$l\Delta x + m\Delta y + n\Delta z = w\Delta t \pm N\lambda = \frac{w}{c}\Delta tc \pm N\lambda$$

$N \in \mathbb{Z}, \lambda$ våglängd.

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda}\left(l, m, n, \frac{w}{c}\right)}_{=\mathbf{L}=\text{vågvektorn}} \cdot \Delta\mathbf{s} = N$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{n}, \frac{w}{c}\right) = \nu\left(\frac{\boldsymbol{n}}{w}, \frac{1}{c}\right), \qquad \nu \text{ är frekvensen.}$$

Är $\mathbf{L}$ en 4-vektor?

$$\mathbf{L}(S) \cdot \Delta\mathbf{s}(S) = N$$

I S':

$$\mathbf{L}(S') \cdot \Delta\mathbf{s}(S') = N \tag{1}$$

Är $\mathbf{L}(S)$ och $\mathbf{L}(S')$ relaterade genom rätt transformation?
Antag att $\mathbf{L}(S)$ transformerar till $\mathbf{V}(S')$. Vi har då

$$\mathbf{V}(S') \cdot \Delta\mathbf{s}(S') = N = \mathbf{L}(S) \cdot \Delta\mathbf{s}(S)$$

Subtrahera från (1):

$$[\mathbf{L}(S') - \mathbf{V}(S')] \cdot \Delta\mathbf{s}(S') = 0$$

$\exists$ händelse på något plan.
Tag fyra händelser på planet med ortogonal $\Delta\mathbf{s}$: $\mathbf{L}(S') = \mathbf{V}(S')$. Alltså är $\mathbf{L}$ en fyrvektor.

Dopplereffekten Våg ν, w och $\boldsymbol{n} = -(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, S och S' i standardkonfiguration

$$\mathbf{L} = \left(-\frac{\nu\cos\alpha}{w}, -\frac{\nu\sin\alpha}{w}, 0, \frac{\nu}{c}\right)$$

$$\frac{\nu'\cos\alpha'}{w} = \frac{\gamma\nu\left(\cos\alpha + vw/c^2\right)}{w'} \tag{2}$$

$$\frac{\nu'\sin\alpha'}{w'} = \frac{\nu\sin\alpha}{w} \tag{3}$$

$$\nu' = \nu\gamma\left(1 + \frac{v}{w}\cos\alpha\right) \tag{4}$$

$$\implies \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Abberation (3)/(2):

$$\frac{\nu'\sin\alpha'}{w'} \bigg/ \frac{\nu'\cos\alpha}{w'} = \frac{\nu\sin\alpha}{w} \bigg/ \frac{\gamma\nu\left(\cos\alpha + vw/c^2\right)}{w}$$

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma\left(\cos\alpha + vw/c^2\right)}$$

$w = c$ ger vad vi visade i kapitel 4.

Lorentztransformationen av w. $\mathbf{L}^2$ är en invariant:

$$\implies \nu^2\left(1 - \frac{c^2}{w^2}\right) = \nu'^2\left(1 - \frac{c^2}{w'^2}\right)$$

$$(4) \implies 1 - \frac{c^2}{w'^2} = \frac{\left(1 - \frac{c^2}{w^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v\cos\alpha}{w}\right)^2}$$

OBSERVERA: Detta är varken Lorentztransformationen av hastighet *eller* abberationsformeln.

Relativistisk mekanik

Axiom:

$$\sum\nolimits^{*} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

där $*$ markerar att ingående termer räknas positivt, utgående negativt. Det behöver inte komma ut lika många partiklar som det kommer in i en kollision. Lorentzinvariant. $\mathbf{P}$ definieras enligt $\mathbf{P} = m_0\mathbf{U}$ är m_0 är massan i partikelns vilosystem ("vilomassa").

4-rörelsemängden

$$\mathbf{P} = m_0\mathbf{U} = m_0\gamma(u)(\boldsymbol{u}, c) =: (\boldsymbol{p}, mc)$$

där

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} & \text{relativistisk rörelsemängd} \\ m = \gamma(u)m_0 & \text{relativistisk massa} \end{cases}$$

$u \to c \implies m \to \infty$

Detta ger oss

$$\sum\nolimits^{*} \boldsymbol{p} = \mathbf{0} \tag{5}$$

$$\sum\nolimits^{*} m = 0 \tag{6}$$

Notera (5) $\iff$ (6).

$u \ll c$ eller $c \to \infty$ ger Newton:

1. klassisk rörelsemängd är bevarad
2. klassisk massa är bevarad

Tag en kollision och betrakta den i ett inertialsystem där den är långsam. Den uppfyller då (5) och (6) med $m = m_0$. Därav följer det att i S' (där den inte är långsam) så uppfyller den också (5) och (6) på grund av *rumtiden.*

Ekvivalens mellan energi och massa Newton: "massa är bevarad".

Verklighet: Annihilation, etc.

Newton: "massa är en egenskap hos materien"

Einstein: "massa är en egenskap hos materien och rörelse"

$$\sum\nolimits^{*} m \quad \text{"kinetiskt bevarande"}$$

Newton: kinetisk energi bevarad.

Hmmm... är det möjligen så att m är ett mått på *all* energi? Ja, $E = mc^2 \longleftarrow$ hypotes!

Indicier: Utveckla m:

$$m = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots$$

Slutsats: "Relativistisk massa är vilomassa + $\frac{1}{c^2}$ gånger den kinetiska energin".

$\implies$ kinetisk energi bidrar till m på ett sätt som är konsistent med $E = mc^2$.

Vidare: Kinetisk energi $= c^2 \cdot$ massa och

All energi *kan* transmutera till alla möjliga former.

All energi = massa $\cdot c^2$.

Men! Tillgänglig energi för makroobjekt $= c^2(m - q)$ där $q = \sum m_0$.

Antagande: $q = 0$.

Men: $E = mc^2$ experimentellt bevisad om och om och om ... och om igen.

Relativistisk kinetisk energi:

$$T = m_0 c^2 (\gamma - 1) = mc^2 - m_0 c^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots$$

OBSERVERA: Elastisk kollision:

$$\sum{}^* = 0 \text{ och } \sum{}^* m_0 = 0 \implies \sum{}^* T = \sum{}^* mc^2 - \sum{}^* m_0 c^2 = 0$$

Masslösa partiklar $m_0 = 0$ och tag E ändlig. $m = E/c^2$ ändlig och $m = \gamma(u) m_0 \implies \gamma = \infty, u = c$.