2006–11–23

Vektorer i rumtiden

3-vektorer. Transformationer mellan koordinatsystem = rotationer och translationer.

Definition: En trippel av tal (a, b, c) är en vektor *under* rotation + translation om den transformerar som $\Delta\boldsymbol{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Kallas då 3-vektor.

Rotation:

$$\begin{cases} \Delta x' = \alpha_{11}\Delta x + \alpha_{12}\Delta y + \alpha_{13}\Delta z \\ \Delta y' = \alpha_{21}\Delta x + \alpha_{22}\Delta y + \alpha_{23}\Delta z \\ \Delta z' = \alpha_{31}\Delta x + \alpha_{32}\Delta y + \alpha_{33}\Delta z \end{cases}$$

Translation:

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

$$\text{“}\alpha\text{”} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \text{“}\cos\theta\text{”}$$

Vektorer bildar invarianta uttryck:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \theta = 90^\circ\right] \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Villkoren linjära $\implies$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ vektor om $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ är vektorer.

Metriken invariant $\implies$ $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \implies \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \text{ är invariant.}$$

Observera: Ortsvektorn $\boldsymbol{r}$ är *inte* en vektor under translationer.

Men $\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ är en 3-vektor. Observera

$$\Delta x' = x' - x'_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_{13}z_1)$$

Derivera och färdigt!

Allmänt: En n-tippel tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är en vektor under transformationen $x^i \mapsto x'^i$ om

$$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j, \qquad \frac{1}{A^i} = B_i$$

4-vektorer

DEFINITION: En kvadruppel tal (A_1, A_2, A_3, A_4) är en 4-vektor om den transformerar som $(\Delta x, \delta y, \Delta z, \Delta ct)$ under Poincarétransformationer.

Alltså:

$$A_1' = \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \cdots + \alpha_{14}A_4, \quad A_2' = \ldots, \quad A_3' = \ldots, \quad A_4' = \ldots$$

$$A'\mu = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

OBSERVERA:

$$\overbrace{(\quad \underbrace{\Delta x, \Delta y, \Delta z}_{\text{rotationer + translationer}} \quad , \quad \underbrace{\Delta ct}_{\text{tidstranslationer}} \quad)}^{\text{Lorentztransformationer } (x\text{-}ct\text{-symmetrisk form})}$$

Precis som för 3-vektorer: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $k\mathbf{A}$ och $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}$ är vektorer om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är vektorer.

Kvadraten av en 4-vektor:

$$\mathbf{A}^2 := A_4^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$$

Längden av en 4-vektor är

$$A := \left|\mathbf{A}^2\right|^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Skalärprodukten:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 = A^2 + B^2 + 2\underbrace{(A_4B_4 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3)}_{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ är invariant.

Inget nytt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, $\mathrm{d}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{B}$.

Egentid:

$$\mathrm{d}\tau^2 := \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}^2}{c^2} = \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{c^2}$$

4-hastigheten:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

analogt till både $\boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}, \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

Tangentvektor till en partikels världslinje i rumtiden. Det är en 4-vektor. Vi har även
$$\frac{\mathrm{d}\tau^2}{\mathrm{d}t^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2} = \gamma^{-2}(u) \implies \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma(u)}$$
och
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)u_1,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u)u_2, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u)u_3$$
$$\mathbf{U} = \gamma(u)(u_1, u_2, u_3, c) = \gamma(u)(\boldsymbol{u}, c)$$

4-accelerationen:
$$\mathbf{A} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}\tau^2}$$
$$\mathbf{A} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(u)\boldsymbol{u}, \gamma(u)c) =$$
$$= \gamma(u)\left(\dot{\gamma}(u)\boldsymbol{u} + \gamma(u)\boldsymbol{a}, \dot{\gamma}(u)c\right), \quad \dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau}$$

I momentanta vilosystemet ($\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$):
$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}, 0)$$

$\mathbf{A} = \mathbf{0}$ om och endast om $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ i vilosystemet. $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$, inget står stilla i tiden.

$$\mathbf{U}^2 = \gamma^2(u)\left(c^2 - u^2\right) = \frac{c^2}{c^2 - u^2}(c^2 - u^2) = c^2$$

Men $\mathbf{U}^2$ är en invariant $\implies$ kan räknas ut i godtyckligt inertialsystem. Sätt $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ (vilosystemet), $\mathbf{U} = (\mathbf{0}, c) \implies \mathbf{U}^2 = c^2$. På samma sätt fås $\mathbf{A}^2 = -\boldsymbol{a}_0^2 = -\alpha^2$ och $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = 0$. (Läs sidan 100.)

4-vektorernas geometri. Om för en given 4-vektor $\mathbf{B}$:

- $\mathbf{B}^2 > 0$ kallas vektorn **tidslik**. Om $B_4 > 0$ är den "framtidspekande", $B_4 < 0$: "baktidspekande" [Jo, det var precis det han skrev på tavlan.] Pekar in i ljuskonen.
- $\mathbf{B}^2 = 0$ kallas vektorn ljuslik (på ljuskonen). Även här kan man dela in i framtidspekande och baktidspekande.

- $\mathbf{B}^2 < 0$ kallas vektorn rumslik (sgn B_4 är ej invariant).

Tidslika och ljuslika vektorer kallas med ett gemensamt namn för kausala vektorer.

Tag en ljuslik vektor $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$. Rotera x-axeln till (B_1, B_2, B_3). $\mathbf{B} = (N, 0, 0, N)$.

Tag en tidslik vektor $\mathbf{B}$, Lorentztransformera så att t-axeln pekar längs $\mathbf{B}$. $\mathbf{B} = (0, 0, 0, \pm N)$.

För en rumslik vektor $\mathbf{B}$, Lorentztransformera så att x-axeln pekar längs $\mathbf{B}$. $\mathbf{B} = (N, 0, 0, 0)$.

Tag två ljuslika vektorer $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ som är ortogonala. Rotera så att $\mathbf{B} = (N, 0, 0, N)$. $C_1 = C_4$ ty $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = N(C_4 - C_1) = 0$. Men $C_4^2 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 = 0 \implies C_2 = C_3 = 0$. Således $\mathbf{B} \perp \mathbf{C} \implies \mathbf{B} \| \mathbf{C}$ om ljuslika.

Några påståenden utan bevis

- Alla vektorer $\mathbf{C}$ så att $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$ där $\mathbf{B}$ är kausal, är rumslika, utom då $\mathbf{B}$ är ljuslik.

- $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ kausala, framtidspekande $\implies \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \geq 0, = 0$ om båda är ljuslika.

- Om en och samma komponent av $\mathbf{B}$ är noll i alla inertialsystem $\implies \mathbf{B} = \mathbf{0}$.