2006–11–20

Rumtiden

Händelser (Einstein et al) — (x, y, z, t) — punkt i rumtiden / Minkowski-rummet (Minkowski et al).

Vad är rumtiden?

Vad är det Euklidiska rummet? (Pythagoras' sats, stort, platt, ortogonalt.)

Vad är ett rum?

Metriskt rum — en massa punkter (mängd) plus ett verktyg att mäta avstånd (metrik (eg. metriktensor)).

Euklidisk metrik: $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$

Invarians $\leftrightarrow$ metrik $\leftrightarrow$ metriskt rum.

$\langle$fig1$\rangle$. Stapla bilder $\rightarrow$ rumtid. Går att göra i Newtons universum också.

I speciell relativitetsteori så har vi metriken

$$\mathrm{d}\mathbf{s}^2 := c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Rumtiden är således ett metriskt rum!

Minkowskidiagram $\langle$fig2$\rangle$ $c \neq 1$. Alla punkter (x, ct) på hyperbeln har avståndet ett från origo.

Minkowski- eller rumtidsdiagram är **projektioner** av rumtiden på det Euklidiska rummet/planet.

Vi kan högst rita 3-dimensioner. (Cirkel = sfär, plan = 3d-rum.)

Ljuskoner. En ljuskon är ett knippe världslinjer för alla fotoner genom en punkt $\mathscr{P}$ i rumtiden / samlingen händelser som precis kan skicka ljussignaler till $\mathscr{P}$ eller ta emot ljussignaler från $\mathscr{P}$ / samlingen händelser vars avstånd från $\mathscr{P}$ uppfyller $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0$.

Med $\mathscr{P}$ i origo, två dimensioner $\implies c^2t^2 - x^2 - z^2 = 0$. $\langle$fig3$\rangle$.

Partiklars världslinjer måste ligga innanför ljuskonen.

Den formella gränsen $c \rightarrow \infty$ (tag t-axeln igen). $\langle$fig4$\rangle$.

Fysiken i metriken. Finita versionen:

$$\Delta\mathbf{s}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Två händelser $\mathscr{P}$ och $\mathscr{Q}$ skiljer sig med $\Delta\mathbf{s}$.

Tre fall

- $\Delta\mathbf{s}^2 = 0 \implies$ precis förbindliga med en ljussignal.
- $\Delta\mathbf{s}^2 > 0$:
$$c^2 - \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} > 0 \implies \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} < c^2$$
I vilosystemet: $\Delta r^2 = 0 \implies \Delta\mathbf{s}^2 = c^2 \Delta t'^2$
$$\implies \frac{\Delta\mathbf{s}}{c} = \text{“egentid”}$$

$$\implies \Delta\tau = \int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \left(\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c}\int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \mathrm{d}\tau \implies \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{c}$$

- $\Delta\mathbf{s}^2 < 0$:
$$\frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} > c^2 \implies \mathscr{P} \text{ och } \mathscr{Q} \text{ kan ej kommunicera}$$

Vektorer. Varför vektorer? Koordinatoberoende, förkortar. Vektorer är kovarianta (de ändras vid, säg, en rotation, men alla ändras “lika mycket”).