2006–11–16

Realtivistisk optik

Ljus i vätskor i rörelse. Vätskor drar delvis ljuset med sig. Fizeau 1851: $u = u' + kv$, där u är den totala hastigheten, u' ljushastigheten i mediet, v är vätskans fart, $k = 1 - \frac{1}{n^2}$, n är brytningsindex: c/u'.
Relativistisk hastighetsaddition:

$$u = \frac{u' + u}{1 + \frac{uv}{c^2}} \approx (u' + v)\left(1 - \frac{u'v}{c^2}\right) \approx u' - \frac{u'^2 v}{c^2} + v = u' + v\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) = u' + kv$$

Fizeaus formel är en approximation av relativistisk hastighetsaddition.

Dopplereffekten. Låt P vara en ljuskälla (+ ideal klocka) i S, momentan fart u, med radiell komponent u_r. ⟨fig1⟩. Ljuskällans period är $\mathrm{d}\tau$.
Period i S:

$$\mathrm{d}t = \underbrace{\gamma(u)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{tidsdilatation}} + \underbrace{\gamma(u)\,\mathrm{d}\tau\,\frac{u_r}{c}}_{\text{rörelse + tidsdilatation}}$$

$$\frac{1}{\nu} = \mathrm{d}t, \qquad \frac{1}{\nu_0} = \mathrm{d}\tau$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_0}\gamma(u)\left(1 + \frac{u_r}{c^2}\right)$$

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \gamma(u)\left(1 + \frac{u_r}{c}\right) \approx \underbrace{1 + \frac{u_r}{c}}_{\text{klassiska Doppler}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{u^3}{c^3}\right)}_{\text{tidsdilatation}}$$

Då $u = u_r$ blir **Dopplerkvoten** enkel:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \left(\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Två observatörer $\mathscr{O}, \mathscr{O}'$ i S respektive S' observerar *samma* signal vid *samma händelse*. ⟨fig2⟩.
Antag: "ljuskällan i vila i S'". $\nu_0 = \nu'$, $u = v$, $u_r = v\cos\alpha$.

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Exempel: Ljuskälla i vila i S, $\nu = \nu_0$, $t = \frac{1}{\nu}$, $\lambda = \frac{c}{v}$. Observatör, acceleration α, S' är momentana inertialsystem.

Observerad frekvens:

$$\nu' = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\nu_0$$

Men: accelererat system $\neq$ momentant inertialsystem. När är denna approximation giltig?

$$\int\limits_{\text{period}} v_{\text{observatör}}\, \mathrm{d}t \ll \text{våglängd}$$

$$\frac{1}{2}\alpha t^2 \ll \frac{c}{\nu} \implies \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{\nu_0^2} \ll \frac{c}{v} \implies \alpha \ll 2c\nu_0$$

Gult ljust: $\alpha \ll 3 \cdot 10^{26} g$.

Aberration (avvikelse)

En inkommande ljussingal bildar vinkeln α och α' med x- respektive x'-axeln i S respektive S'.

$$u_1 = -c\cos\alpha$$
$$u_1' = -c\cos\alpha'$$

Lorentztransformation av hastigheterna ger

$$-c\cos\alpha' = \frac{-c\cos\alpha - v}{1 - \frac{-v\cdot c\cos\alpha}{c^2}}$$

$$\implies \cos\alpha' = \frac{\cos\alpha + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}$$

Antag att singalen ligger i x-y-planet.

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha\right)}$$

Med hjälp av den trigonometriska identiteten

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \frac{\sin\alpha'}{1 + \cos\alpha'} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha\right)}}{1 + \frac{\cos\alpha + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha\right)} \cdot \frac{1+\frac{v}{c}\cos\alpha}{1+\frac{v}{c}\cos\alpha+\cos\alpha+\frac{v}{c}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\gamma} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\cos\alpha\right)} = \tan\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1+\frac{v}{c})^2}} =$$

$$= \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\frac{\alpha}{2}$$

Detta ger

$$v > 0 \implies \alpha' < \alpha$$

$$v < 0 \implies \alpha < \alpha'$$

För utgående strålning $c \to -c$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{v+c}{v-c}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\frac{\alpha}{2}$$

$v > 0 \implies \alpha < \alpha'$ Headlight effect.

Exempel: Mellan två rymdstationer $\mathscr{A}$ och $\mathscr{B}$ i relativ vila, går en skyttel $\mathscr{C}$ med fart v. $\mathscr{A}$ skickar ut signaler med period τ till $\mathscr{C}$ som skickar vidare till $\mathscr{B}$. Vilken period mäter $\mathscr{B}$ och $\mathscr{C}$?

Lösning $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$. ν_0, τ syftar på $\mathscr{A}$; ν, τ' syftar på $\mathscr{C}$.

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \gamma(v)\left(1+\frac{v}{c}\right) \implies \frac{\tau'}{\tau} = \gamma(v)\left(1+\frac{v}{c}\right) \implies \tau' = \tau\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$

$$\tau'' = \gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)\tau' = \gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)\tau = \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\tau = \tau$$

Exempel: Ljuskälla P med fart v längs y-axeln i S. Observatör O med fart v längs x-axeln i S. Observatören tar emot signalen på samma avstånd från origo som källan sänder ut den. Beräkna Dopplerskiftet. $\langle$fig3$\rangle$.

Lös med två Doppler: P sänder ut strålning med frekvens ν_0 som i S mäts med frekvens ν, som av observatören O mäts upp med frekvensen ν'.

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \gamma(v)\left(1 + \frac{u_r}{c}\right) = \left[u_r = v\cos\frac{\pi}{4}\right] = \gamma(v)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{\nu'}{\nu} = \gamma(v)\left(1 + \frac{v}{c}\cos\frac{3\pi}{4}\right) = \gamma(v)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{\nu_0}{\nu'} = \frac{\frac{\nu_0}{\nu}}{\frac{\nu'}{\nu}} = \frac{\gamma(v)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v}{c}\right)}{\gamma(v)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v}{c}\right)} = \frac{\sqrt{2}c + v}{\sqrt{2}c - v}$$