2006–11–13

Relativistisk kinematik

Förra gången:

$$c^2 - u'^2 = \frac{c^2(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{(c^2-u_1v)^2}$$

$$\gamma^2(v) = \frac{c^2}{c^2-v^2}$$

$$c^2\gamma^{-2}(u') = \frac{c^4\gamma^{-2}(u)\gamma^{-2}(v)}{c^2\left(1-\frac{vu_1}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{\gamma^2(u')}{\gamma^2(u)} = \gamma^2(v)\left(1-\frac{u_1v}{c^2}\right)^2$$

$$\frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(v)\left(1-\frac{vu_1}{c^2}\right)$$

$$\frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} = \gamma(v)\left(1+\frac{vu_1}{c^2}\right)$$

Accelererad rörelse Hur transformeras acceleration?

$$\frac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}u_1} = \frac{1-\frac{u_1v}{c^2}+(u_1-v)\frac{v}{c^2}}{D^2} = \frac{1}{\gamma^2D^2}, \qquad D = 1-\frac{u_1v}{c^2}$$

$$u_1' = \frac{u_1-v}{1-\frac{vu_1}{c^2}}$$

$$u_2' = \frac{u_2}{\gamma\left(1-\frac{u_1v}{c^2}\right)} = \frac{u_2}{\gamma D}$$

$$\mathrm{d}u_2' = \frac{\gamma D\mathrm{d}u_2 + \gamma u_2\mathrm{d}u_1\frac{v}{c^2}}{\gamma^2D^2}, \qquad \mathrm{d}u_3' = \text{“Samma”}$$

$$\mathrm{d}t' = \gamma\mathrm{d}t\left(1-\frac{vu_1}{c^2}\right) = \gamma D\mathrm{d}t$$

$$a_1' = \frac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t'} = \frac{a_1}{\gamma^3D^3}$$

$$a_k' = \frac{\mathrm{d}u_k'}{\mathrm{d}t'} = \frac{a_k}{\gamma^2D^2} + \frac{U_ka_1V}{c^2\gamma^2D^3}$$

Således: a är inte variant under Lorentztransformationen.

Vi definierar **egenacceleration**.

$$u_1 = v \implies D = \gamma^{-2}$$

$$\alpha = (a_1') = \frac{a_1}{\gamma^3\gamma^{-6}} = \gamma^3 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\gamma(u)u\right]$$

Hyperbolisk rörelse, α konstant.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\gamma(u)u\right] = \alpha$$

$$\gamma(u)u = \alpha t$$

Låt $u = 0$ vid $t = 0$.

$$\left(\gamma(u)\right)^2 u^2 = (\alpha t)^2$$

$$\frac{u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (\alpha t)^2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2}} = (\alpha t)^2 \implies \frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{(\alpha t)^2}$$

$$u^2 = \frac{(\alpha t)^2 c^2}{c^2 + (\alpha t)^2} \implies u = \frac{\alpha t c}{\sqrt{(\alpha t)^2 + c^2}}$$

$$x = \frac{c}{\alpha}\sqrt{(\alpha t)^2 + c^2}$$

$$x^2 = \frac{c^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2 t^2 + c^2\right)$$

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

$$\alpha \to \infty \implies x = ct$$

Minkowskidiagram. Vi sätter $c = 1$. $\langle$fig1$\rangle$.

$$\text{Partikelns hastighet} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \text{världslinjens lutning mot } t\text{-axeln}$$

Två olika sätt att betraktat en transformation.

Passivt — punkten (x, t) får nya koordinatangivelser (x', t').

Aktivt — punkten (x, t) “rör sig” till ett nytt läge (x', t').

Passivt $\langle$fig2$\rangle$

t'-axeln ges av $x' = 0 \implies \gamma(x - vt) = 0 \implies x = vt$.

x'-axeln ges av $t' = 0 \implies \gamma(t - vx) = 0 \implies t = vx$.

Skalan på x'- och t'-axlarna ges av de kalibrerande hyperblerna:

$$t'^2 - x'^2 = \pm 1 = t^2 - x^2$$

"$x' = 1$"$\to \infty$ då $v \to c$.

Aktivt Vart rör sig punkten (x, t)? Det går en och endast en hyperbel genom (x, t). $t^2 - x^2 = X^2$. X "klassificerar" hyperbeln.

$t^2 - x^2$ är bevarat $\implies t'^2 - x'^2 = X^2 \implies (x', t')$ ligger på samma hyperbel. $\langle$fig3$\rangle$

Det går att skriva Lorentztransformationen

$$\begin{cases} \xi' = \mathrm{e}^{-\phi}\xi \\ \eta' = \mathrm{e}^{\phi}\eta \end{cases}, \qquad \phi = \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

v ökar $\implies \phi$ ökar $\implies |\xi'|$ minskar, $|\eta'|$ ökar.

"Stel rörelse"

$$x^2 - c^2t^2 = X^2, \quad X \in [a, b]$$

beskriver en samling världslinjer eller en stav. Denna rörelse kallas stel då endast längdkontraktionen verkar.

Vi har då

- varje volymselement är momentant i vila i något inertialsystem.
- inga "spänningar" verkande på staven.
- den ändrar ej sin rörelse.
- bakändan har större α än framändan.

Det fåniga exemplet. Hur förhåller sig Lorentztransformationen till dödsstraffet? $\langle$fig4$\rangle$

$$v_p = \frac{s}{t_p} = \frac{s}{\frac{s \tan\theta}{v}} = \frac{v}{\tan\theta}$$

$c > v = 1\,\mu\text{m/år}$. $v_p \to \infty$ då $\theta \to 0$.
Nästa gång ska vi blåsa igenom den relativistiska optiken.