2006–11–06

Förra gången:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) & \longleftarrow \quad \text{Vad är } \gamma? \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt) \end{cases}$$

Om man sätter in Newtons postulat $t' = t$ får man:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt) \end{cases} \implies x + x' = \gamma(x + x') \implies \gamma = 1 \implies x' = x - vt$$

Einstein: $x = ct$ och $x' = ct'$ är giltiga samtidigt (de är samma ljussignal).

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - vt) \\ ct = \gamma(ct' + vt') \end{cases}$$

$$c^2tt' = \gamma^2 tt'(c - v)(c + v)$$

$$c^2 = \gamma(c^2 - v^2)$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma = {}_{(}\pm{}_{)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (v \to 0 \text{ ger } \gamma > 0)$$

$$t': \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

Eliminera x':

$$x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \implies x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt'$$

$$t' = \frac{1}{\gamma v}x - \frac{\gamma}{v}x + \gamma t = \gamma\left(t + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)x\right)$$

$$\frac{1}{v}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = -\frac{v}{c^2}$$

$$\implies \begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentztransformationens egenskaper

v-omkast

Lite algebra:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases} \implies \begin{cases} t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x \\ x = \frac{x'}{\gamma} + vt \end{cases} \implies \begin{cases} t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right) \\ x = \frac{x'}{\gamma} + v\left(\frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\ x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x' + vt'\right) \end{cases} \implies \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + vt'\right) \end{cases}$$

Observera!

1. Vi har inverterat Lorentztransformationen.
2. Vi kunde ha bytt v mot $-v$ och S mot S'.

Visa 1 och 2 samt 1 $\Leftrightarrow$ 2.

Differenser och differentialer

$$\begin{cases} \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \\ \Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v \cdot \Delta t\right) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x\right) \\ \mathrm{d}x' = \gamma\left(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t\right) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \end{cases}$$

Symmetri i x och ct

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c} \cdot ct\right) \\ ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c} \cdot x\right) \end{cases}$$

Bevarat/invariant mått

$$\begin{cases} c^2\mathrm{d}t'^2 = \gamma^2\left(c^2\mathrm{d}t^2 - 2c\mathrm{d}t \cdot \frac{v}{c}\mathrm{d}x + \frac{v^2}{c^2}\mathrm{d}x^2\right) \\ \mathrm{d}x'^2 = \gamma^2\left(\mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{d}x \cdot \frac{v}{c}c\mathrm{d}t + \frac{v^2}{c^2}c^2\mathrm{d}t^2\right) \end{cases}$$

$$c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 = \gamma^2\left(c^2\mathrm{d}t^2 + \frac{v^2}{c^2}\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^2 - \frac{v^2}{c^2}\mathrm{d}t^2\right) =$$

$$= \underbrace{\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1} \left(c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2\right)$$

Vi har

$$\boxed{c^2 \mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2}$$

I ord: Lorentztransformationen bevarar måttet $\mathrm{d}\mathbf{s}^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$.

Samtidighet är relativt

Flygplansexemplet. S: markbundet inertialsystem; S': flygplanets inertialsystem.

$$\Delta t' = 0 \implies \Delta t = \gamma \left(0 + \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \neq 0$$

Lorentztransformationen och den Newtonska gränsen

För Lorentzfaktorn $\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ gäller

- symmetri i v.
- $v \neq 0 \implies \gamma(v) > 1$
- $\frac{v}{c} \approx 0 \implies \gamma(v) \approx 1$

Små v i Lorentztransformationen:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \approx t \\ x' = \gamma\left(x - vt\right) \approx x - vt \end{cases}$$

Formella gränsen $c \to \infty$ ger $\gamma(v) \to 1$.

I gränsen $v \to c$ har vi $\gamma(v) \to \infty$.

Endast en invariant fart

Alla fysikaliska fenomen som har invariant fart i vakuum har farten c.

Gruppen av Lorentztransformationer

DEFINITION: En mängd G (ändlig eller oändlig) med en binär operation (kompositionsregel) '$\circ$', är en **grupp** om

1. $A \in G, B \in G \implies A \circ B \in G$ (gruppen är sluten)
2. $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C \, \forall \, A, B, C \in G$
3. $\exists I \in G : A \circ I = I \circ A = A \, \forall \, A \in G$ (identitetselementet)
4. $\forall \, A \in G \, \exists \, A^{-1} \in G : A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = I$ (invers)

Mängden av alla Lorentztransformationer bildar en grupp, Lorentzgruppen. Kompositionsregel: "utför en transformation efter den andra". Invers: göra v-omkast. Identitetselementet: Lorentztransformationen för $v = 0$.

Visa resten!

Kontroll av Lorentztransformationen

Kvarstående frågor:

1. Är S' ett inertialsystem?
2. Respekterar Lorentztransformationen relativitetspostulatet?
3. Är Lorentstransformationen konsistent för alla inertialsystem (i standardkonfiguration)?

Lorentztransformationen är linjär $\implies$ Lorentztransformationen bevarar uniform rörelse $\implies$ Newtons första lag.

Euklidiskt avstånd $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$. Mätt med ljus:

$$\begin{aligned} c^2\mathrm{d}t^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ \implies c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 &= 0 \\ \iff c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 &= 0 \\ c^2\mathrm{d}t'^2 &= \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 \end{aligned}$$

Slutsats: S' är ett inertialsystem och Lorentztransformationen respekterar relativitetspostulatet.

3. Krav: $\exists$ transformation $S' \mapsto S$; om vi har $S \mapsto S''$ och $S' \mapsto S''$ så finns $S \mapsto S'$.

Dessa krav ingår i definitionen av Lorentzgruppen.

Alltså: Lorentztransformationen är konsistent därför att den bildar en grupp.

Poincarégruppen

För att klara alla inertialsystem måste Lorentzgruppen utökas med rotationer, translationer och tidstranslationer. Vi får då Poincarétransformationer. Gruppen av dessa kallas Poincarégruppen.

<u>Läs även 2.9 till 2.11!</u>