2007–10–29

Beteckningar

t: “tiden”

x: rymdvariabler: $x=(x_1,...,x_n)$. I enstaka fall: x, y (endimensionella variabler).

Okända funktioner: u, v, w

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv u_k \equiv u_{x_k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \equiv u_{kj}$$

Linjära: operationer med okända funktionen:

1. derivator
2. $\pm$
3. multiplikation med kända funktioner

$$u_{xx} + u_{yy} + \mathrm{e}^y = 0: \quad \text{linjär}$$

$$\mathrm{e}^y\, u_{xx} - \mathrm{e}^x\, v_{yy} = 0: \quad \text{linjär}$$

$$u\, u_{xx} - u_{yy} = 0: \quad \text{icke linjär}$$

Linjär PDE av ordning 1 med 2 oberoende variabler

$$a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y)$$

Ett enkelt fall: $b \equiv 0$.

$a\, u_x + c\, u = f$ — en ordinär differentialekvation: $u_x + h\, u = g$ där $h = e/a$; $g = f/a$.

$$u(x, y) = \mathrm{e}^{-H(x,y)}\left(\int \mathrm{e}^{+H(\tau,y)} g(\tau, y)\,\mathrm{d}\tau + C(y)\right), \quad \text{där}$$

$$H(x, y) = \int h(\tau, y)\,\mathrm{d}\tau$$

$C(y)$ är en godtycklig funktion.

Allmänna fallet: $a \neq 0$, $b \neq 0$. Vi söker sådana nya variabler $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \psi(x, y)$ så att u_η försvinner i dessa nya variabler. Kedjeregeln:

$$u_x = u_\xi\, \xi_x + u_\eta\, \eta_x, \quad u_y = u_\xi\, \xi_y + u_\eta\, \eta_y$$

$$a(u_\xi\, \varphi_x + u_\eta\, \psi_x) + b(u_\xi\, \varphi_y + u_\eta\, \psi_y) + c\, u = f$$

$$u_\xi(a\, \varphi_x + b\, \varphi_y) + u_\eta(a\psi_x + b\, \psi_y) + c\, u = f$$

Vi vill: $a\, \psi_x + b\, \psi_y = 0$. Vi löser denna.

Skriver en ODE (karakteristiska ekvationen): $a\,\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}x$ eller $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a}$. Låt $\psi(x, y) = \gamma$ där γ är godtycklig konstant vara allmänna lösningen till karakteristiska ODE.

$$\psi(x, y(x)) = \gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\psi(x, y(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\gamma = 0$$

Kedjeregeln:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{b}{a}$$

$$\psi_x\,a + \psi_y\,b = 0$$

Efter att vi hittat ψ, tar vi φ godtyckligt, bara som $a\varphi_y + b\,\varphi_y \neq 0$.

Exempel:

$$x\,u_x + y\,u_y + u = x$$

Hitta allmänna lösningen där $x, y > 0$.

Lösning:

Vi söker nya variabler $\xi = \varphi(x, y)$ och $\eta = \psi(x, y)$ så att u_η försvinner då problemet uttrycks i dessa nya variabler.

Karakteristiska ekvationen: $a = x$, $b = y$:

$$x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x$$

Variabelseparation:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln\gamma$$

$$y = \gamma x, \quad \boxed{\frac{y}{x} = \gamma}$$

Så vi tar $\psi(x, y) = y/x$.

För φ kan vi ta $\varphi(x, y) = x$. (Måste ha $a\,\varphi_x + b\,\varphi_y \neq 0$, här $x\cdot 1 + y\cdot 0 \neq 0$.) Så vi har de nya variablerna:

$$\eta = \psi(x, y) = \frac{y}{x} \quad \text{och} \quad \xi = \varphi(x, y) = x$$

och vår ekvation i de nya variablerna blir:

$$u_\xi\cdot\xi + 0 + u = \xi$$

$$u_\xi + \frac{u}{\xi} = 1$$

Löser med hjälp av homogena ekvationen

$$v\colon \quad v_\xi + \frac{v}{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}; \quad v = \frac{1}{\xi}$$

$$u = \frac{1}{\xi} \cdot w$$

$$u_\xi + \frac{u}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2} w + \frac{1}{\xi} w_\xi + \frac{1}{\xi^2} w = 1$$

$$\frac{1}{\xi} w_\xi = 1; \quad w_\xi = \xi; \quad w = \frac{\xi^2}{2} + C(\eta)$$

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi^2}{2} + C(\eta)\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

där $C(\eta)$ är en godtycklig funktion.

1. Kurvor — $y(x)$ — lösningar till karakteristiska ekvationen. Karakteristiska kurvor för ekvationen i vårt fall $y = \gamma x$.

2. Cauchyproblemet — hitta lösningen till en partiell differentialekvation med angivna värden på en given kurva (yta).

I vårt fall, hitta lösningen $u(x, y) = y$ på kurvan $y = x^2$.

$$u(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C\Big(\frac{y}{x}\Big) = x^2, \quad y = x^2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} C\left(\frac{x^2}{x}\right) = x^2, \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C(x) = x^2$$

$$C(x) = x\Big(x^2 - \frac{x}{2}\Big)$$

3. Cauchyproblemet kan man ställa upp och lösa på icke-karakteristiska kurvor $\equiv$ sådana kurvor som *inte* tangerar karakteristiska kurvor. ⟨fig1⟩

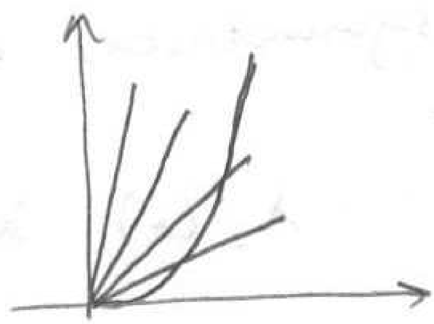

Figure 1.

Partiella differentialekvationer av ordning 2

$u(x), x = x_1, \ldots, x_n$

Ekvation ($\mathcal{L}$ är en operator):

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{j,k} a_{jk}(x) u_{jk} + \sum_{j,k} b_j(x) u_j + c(x)\, u = F$$

för något högerled F. $a_{jk}(x)$, $b_j(x)$ och $c(x)$ är koefficienter, reella funktioner. De högsta koefficienterna $a_{jk}(x)$ kan placeras i koefficient-matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Vi betraktar $a_{jk} = a_{kj}$ (koefficientmatrisen är symmetrisk). Varje partiell differentialekvation kan transformeras till symmetrisk form.

EXEMPEL: $u_{xx} + u_{xy} + 3\, u_{yx} + u_{yy} = 0$.

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 1 \\ a_{21} = 3 \\ a_{22} = 1 \end{cases}$$

Men: $u_{xy} = u_{yx} \quad \Rightarrow \quad$ Skriver om som $u_{xx} + 2\, u_{xy} + 2\, u_{yx} + u_{yy} = 0$.

I varje punkt x har matrisen $A(x)$ egenvärden $\lambda_k(x)$ och egenvektorer $e_k(x)$. För symmetriska reella matriser gäller:

1. $\lambda_k(x)$ är rella.
2. Egenvektorer $e_k(x)$ är reella.
3. Egenvektorerna är ortogonala: $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ för $k \neq j$; och normerade: $\langle e_k, e_k \rangle = 1$.

Klassificering

I. Man säger att ekvationen är av ...

1. **elliptisk typ** i punkten x om alla $\lambda_k(x)$ är av samma tecken.
2. **hyperbolisk typ** om ett egenvärde har ett visst tecken, och alla andra har ett annat tecken (och är nollskilda).
3. **parabolisk typ** om bland $\lambda_k(x)$ finns några $\lambda_k(x) = 0$ och kvarstående har samma tecken.
4. **ultrahyperbolisk typ** om bland $\lambda_k(x)$ finns några positiva och några (fler än en) är negativa, och inget är noll.

II. Vi säger att ekvationen tillhör någon typ i hela området Ω om den tillhör den typen i alla punkter i Ω.

EXEMPEL.

I. $\Delta u = F$; $u_{11} + u_{22} + u_{33} = F$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ ger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1$. Den är **elliptisk**.

II. $t = x_4$: $u_{11} + u_{22} + u_{33} - u_4 = 0$ (Värmeledning)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $\lambda_4 = 0$: **parabolisk**.

III. $u_{11} + u_{22} + u_{33} - u_{44} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $\lambda_4 = -1$: **hyperbolisk**.

IV. $u_{12} = 0$. Vi skriver om den på symmetrisk form: $\frac{1}{2}u_{12} + \frac{1}{2}u_{21} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Söker egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

Den var **hyperbolisk**.

Dessa kallas för **kanoniska former**.

Ekvationer med **konstanta** koefficienter (motsvarar homogent medium). Med hjälp av variabelbyte kan man reducera till kanonisk form.

$$\begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_n): & \text{gamla variabler} \\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n): & \text{nya variabler} \end{cases}$$

Vi söker $\xi_m = \sum e_{mj} x_j$.

Vi anpassar så att icke-diagonala termer försvinner i nya koefficientmatrisen.

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial u}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial u}{\partial \xi_m} e_{mk}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m,l} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m \partial \xi_l} e_{mk} e_{lj}$$

$$\mathcal{L}(u) = \sum a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = \sum_{j,k} \sum_{m,l} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m \partial \xi_l} e_{mk} e_{lj} a_{jk} = \sum_{m,l} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m \partial \xi_l} \tilde{a}_{ml},$$

$$\tilde{a}_{ml} = \sum_{j,k} a_{jk} e_{mk} e_{lj} = \langle A e_m, e_l \rangle, \quad e_m = \begin{pmatrix} e_{m1} \\ \vdots \\ e_{mn} \end{pmatrix}$$

Vi vill välja e_{mk} så att matrisen $\tilde{a}_{ml}$ blir diagonal. Vi tar e_m som engenvektorer till A: $A\, e_m = \lambda_m\, e_m$.

$$\tilde{a}_{ml} = \langle A\, e_m, e_l\rangle = \lambda \langle e_m, e_l\rangle = \begin{cases} \lambda_m, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases}$$

Kanoniska formen för ekvationer med variabler (glatta) koeffienter för två oberoende variabler.

I. Hyperbolisk typ. x, y oberoende variabler:

$$A\, u_{xx} + 2\, B\, u_{xy} + C\, u_{yy} + \text{lägre termer} = F$$

där $A(x, y), B(x, y)$ och $C(x, y)$ är funktioner.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2}$ ges av determinanten:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & A - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_{1,2}$ har samma tecken om $B^2 - A\, C > 0$: elliptisk.

$\lambda_{1,2}$ har olika tecken om $B^2 - A\, C < 0$: hyperbolisk.

$B^2 - A\, C = 0 \Rightarrow$ ett egenvärde $= 0$: parabolisk.

Vi gör variabelbyte $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \psi(x, y)$:

$$A\, u_{xx} + 2\, B\, u_{xy} + C\, u_{yy} = \begin{bmatrix} u_x = u_\xi\, \varphi_x + u_\eta\, \psi_x \\ \text{o.s.v.} \end{bmatrix} = \tilde{A}\, u_{\xi\xi} + 2\, \tilde{B}\, u_{\xi\eta} + \tilde{C}\, u_{\eta\eta} + \text{lägre termer}$$

$$\tilde{A} = A\varphi_x^2 + 2\, B\, \varphi_x\, \varphi_y + C\, \varphi_y^2$$

$$\tilde{C} = A\, \psi_x^2 + 2\, B\, \psi_x\, \psi_y + C\, \psi_y^2$$

$$\tilde{B} = A\, \varphi_x \psi_x + C\, \varphi_y\, \psi_y + B(\varphi_x\, \psi_y + \varphi_y\, \psi_x)$$