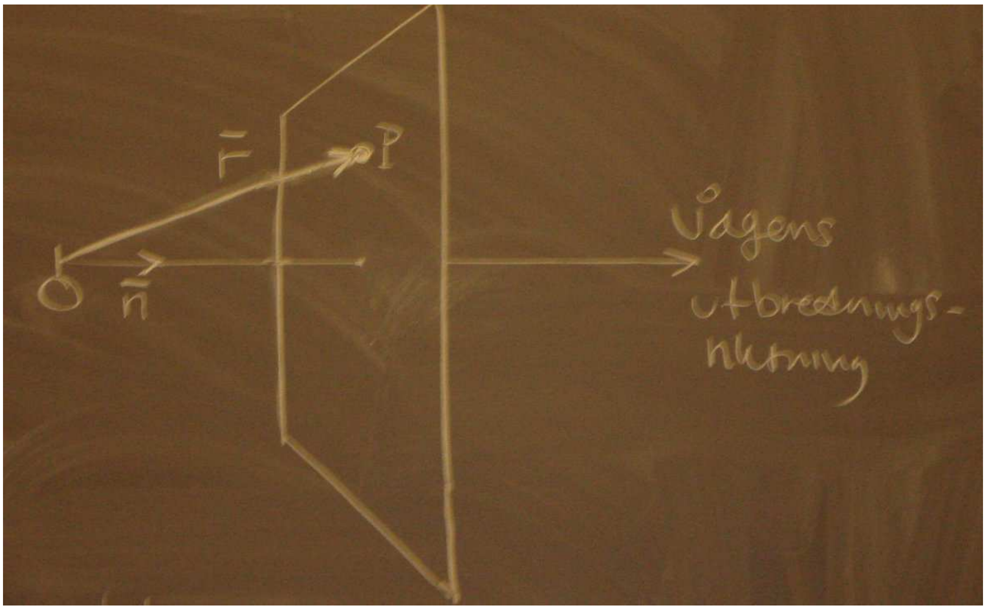
## 2007–01–23

**Plan våg** ⟨fig1⟩




**Figur 1.** $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$

$$\psi = f(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - v\,t)$$

Det blir som i en dimension:

$$\psi = f(x' - v\,t)$$

Plan våg

$$\psi = f(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - v\,t) = f(n_x\,x + n_y\,y + n_z\,z - v\,t) = f(u)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial u}}_{=f'} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=n_x}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = f''\cdot n_x^2$$

På samma sätt

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial u}}_{=f'} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=n_y}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f''\cdot n_y^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = f''\cdot n_z^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f''\cdot v^2$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \underbrace{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}_{=1} f'' \quad \text{ty } \boldsymbol{n} \text{ är en enhetsvektor}$$

Detta ger oss vågekvationen i tre dimensioner:

$$\nabla^2\,\psi = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

**Harmoniska vågor**

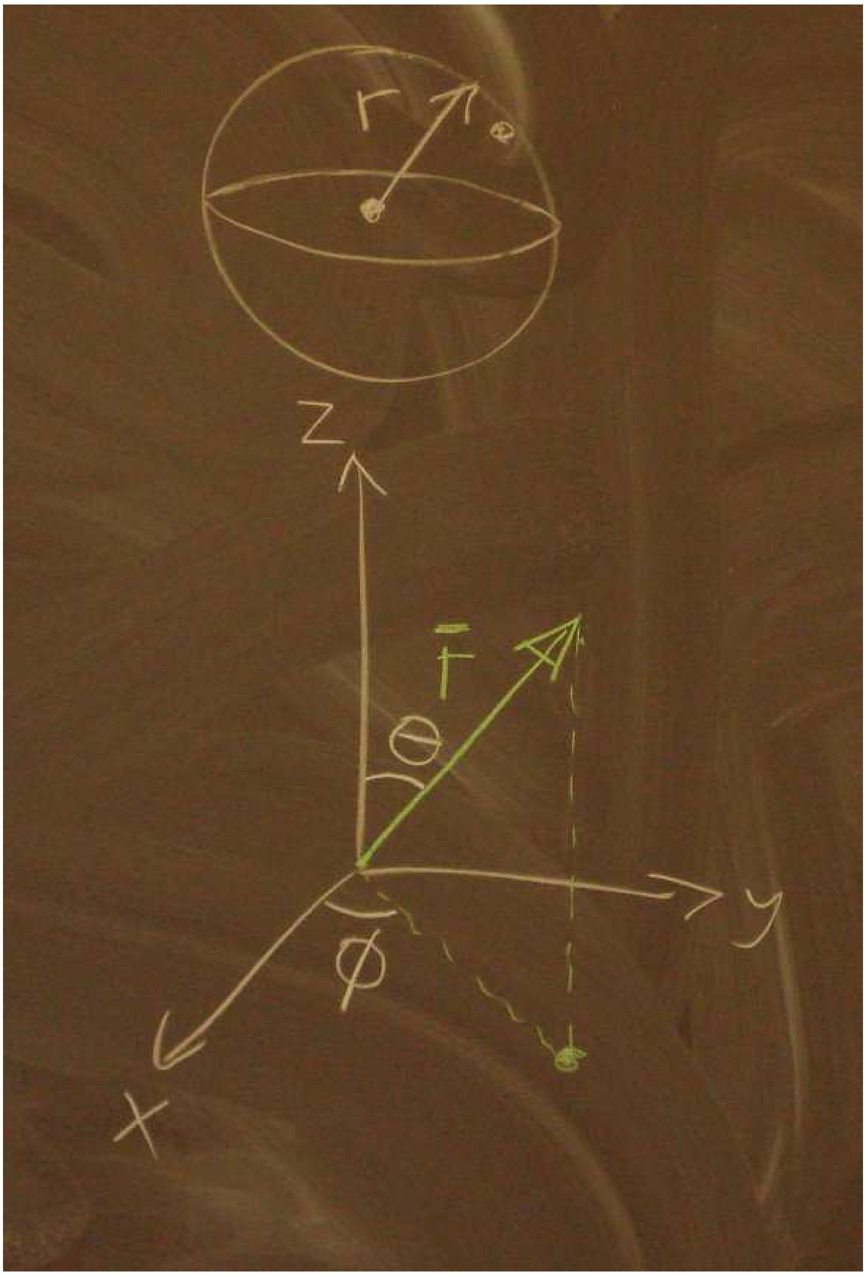
$$\psi = a\cos[k(v\,t - n_x x - n_y y - n_z z) + \varepsilon]$$

Inför vågvektorn:

$$\boldsymbol{k} = k\,\boldsymbol{n}$$

$$\psi = a\cos[\omega\,t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varepsilon]$$

**Sfärisk våg** ⟨fig2⟩




**Figur 2.**

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

För sfäriska vågor, med källan i origo, är vågen oberoende av $\theta$ och $\varphi$. $\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(r)$.

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

Samma som

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}$$

**Bevis.** $$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(2\,r\frac{\partial\psi}{\partial r} + r^2\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi + r\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \quad \square$$

Vågekvationen:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Multiplicera med $r$ på båda sidor:

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}$$

Den ser nu ut som den endimensionella vågekvationen om $\psi_{\mathrm{endim}}$ ersätts med $r\,\psi$.

Lösningen till vågekvationen:

$$r\psi = f(r - v\,t)$$

$$\psi = \frac{1}{r}f(r - v\,t)$$

Harmonisk sfärisk våg:

$$\psi = \frac{\mathcal{A}}{r}\cos(\omega t - k\,r + \varepsilon)$$

"Amplituden" $\mathcal{A}/r$ avtar med $r$.

**Språkkunskap**

STRÅLE: anger energins utbredningsriktning.

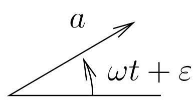
VÅGFRONT: en yta vars alla punkter nås samtidigt av en våg. ⟨fig3⟩


**Figur 3.**

Hur adderas vågor?

1. Algebraisk metod.

2. Vektoraddition / *phasors*. ⟨fig4⟩




**Figur 4.**

3. Komplexa tal / komplexa vågor.

Läs själva kapitel 2.6.

**Cylindrisk våg**

$$\psi \approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - k\,r)$$

**Elektromagnetisk fältteori** (kapitel 3)

Kapitel 3.2: elektromagnetiska vågor.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

Specialfall vakuum: $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} = c$$

I optiska sammanhang använder man sällan ferromagnetiska ämnen, sätt $\mu_r = 1$.

---

Brytningsindex: $n = c/v$.

$H_2O$: $n = 1.33$.

glas: $n = 1.5$ till 1.7

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0\,\mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$$

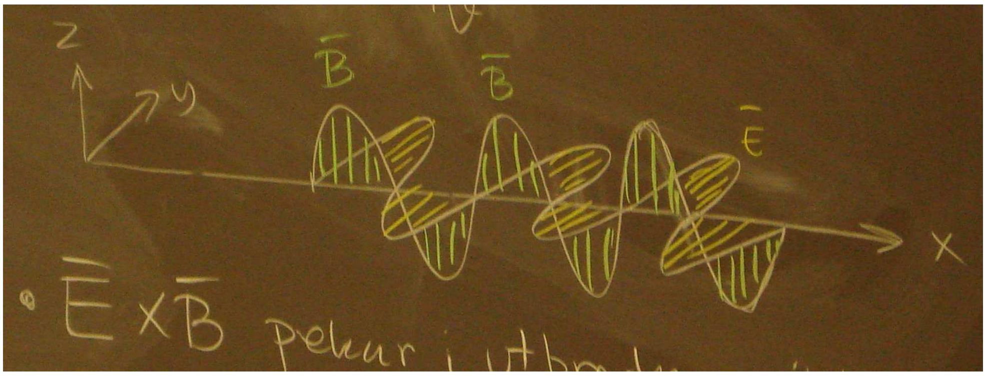
Men $n, \varepsilon_r$ och $v$ är frekvensberoende.

$H_2O$: $\varepsilon_r = 81$ (statiskt, 0 Hz). $n = 1.33$ (ljusfrekvens $\sim 10^4$ Hz). $\varepsilon_r = n^2 = 1.33^2 = 1.8$.

**Egenskaper hos elektromagnetiska vågor**

- $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{E}$ är $\perp$ mot varandra och mot utbredningsriktningen.

- $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{E}$ är kopplade vågor, som svänger i fas. Dessutom t.ex. $B_z = \frac{E_y}{v}$.

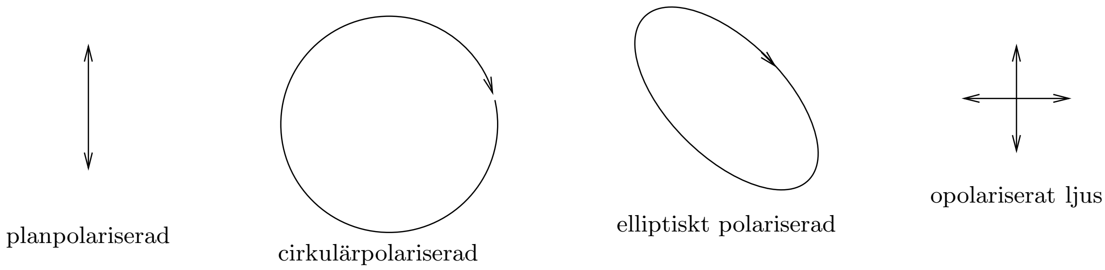



**Figur 5.**

- $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ pekar i utbredningsriktningen.

Detta är en plan(linjär)polariserad våg där $\boldsymbol{E}$ svänger i ett plan (som innehåller utbredningsriktningen), $x$-$y$-planet (och $\boldsymbol{B}$ i $x$-$z$-planet).

**Olika typer av polarisation** ⟨fig6⟩




**Figur 6.** Planpolarisation, cirkulärpolarisation, elliptisk polarisation, opolariserat ljus

Opolariserat ljus: slumpmässig superposition av många linjärpolariserade vågor: “naturlig ljus”.

**Intensitet — Irradians** är energin som passerar en areaenhet på en tidsenhet [W/m$^2$].

Momentanvärden:

$$I_{\text{mom}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 v = E \cdot H \quad \text{där } H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}, \quad B = \frac{E}{v}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

Poyntings vektor $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$. $|\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}| = E H = I_{\text{mom}}$.

Fälten varierar i tiden, medelvärdesbilda:

$$\langle I_{\text{mom}} \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon_r v \langle E^2 \rangle$$

Antag: Harmonisk planpolariserad våg, $E = E_0 \cos(\omega t - k x)$.

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} E^2$$

$$\langle I_{\text{mom}} \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon_r v \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n E_0^2 = I$$

Alltså: $I \propto n \cdot \text{amplituden}^2$. $I = \langle |\boldsymbol{S}| \rangle$.

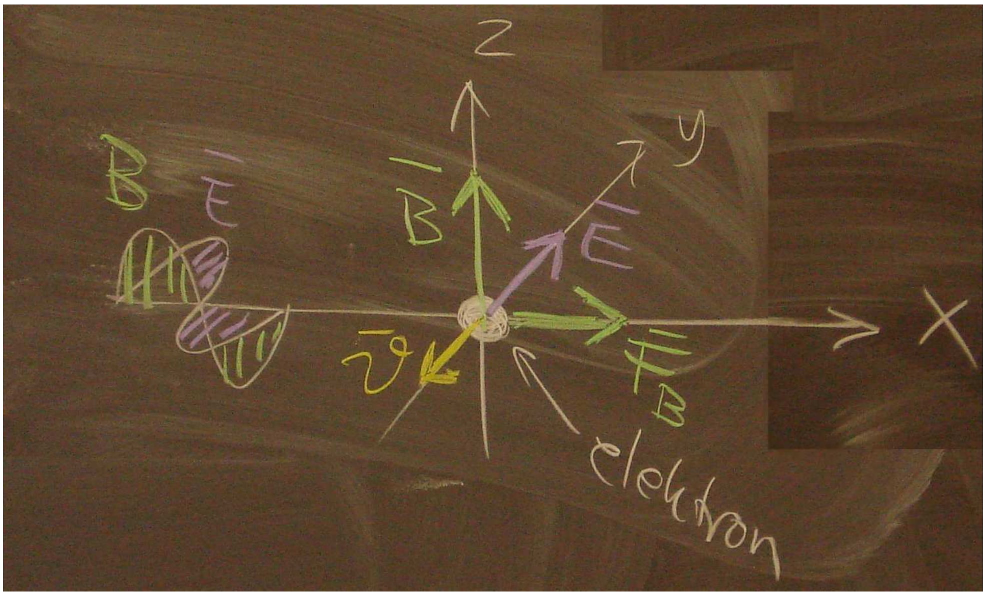
**Fotoner**

Energi $E = h\nu$ där $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js. Rörelsemängd $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar\, k$ där $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

**Strålningstryck**

Den elektromagnetiska vågen transporterar också rörelsemängd. Det ger upphov till strålningstrycket. Solens strålningstryck är ungefär $5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}$.

Specialfall: En planpolariserad våg faller in mot en elektron.




**Figur 7.**

I $\boldsymbol{E}$-fältet, kraft på elektronen $\boldsymbol{F}_e = q\,\boldsymbol{E}$. Då får den hastigheten $v$. Då påverkas den av

$$\boldsymbol{F}_B = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

som ger strålningstrycket.