2006–05–17

Tenta: 16 maj 2005

Uppgift 2. Lutande tornet i Pisa. ⟨fig65⟩. En kula släpps från höjden $h = 55$ m; Pisa befinner sig på 44° nordlig bredd. Corioliseffekt är att ta i beaktande. Corioliseffekten ger en avvikelse d gentemot det ställe kulan hade landat om vi inte hade haft Coriolis-”krafter”.

a) Vi vet att $F_{\text{cor}} \propto \omega$, där ω är jordens rotationshastighet.

$$\Longrightarrow d \propto \omega$$

$d \propto h^p$ för något p.

Parametrar: ω, $\cancel{m}$, g, h.

$$d \propto \omega\, h^p\, g^q$$

Dimensionsmässigt: $\mathrm{m} = \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{m}^p \cdot \left(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)^q$ ger

$$\begin{cases} -1 - 2q = 0 & \Rightarrow \quad q = -\frac{1}{2} \\ p + q = 1 & \Rightarrow \quad p = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$d \propto \omega \sqrt{\frac{h^3}{g}}$$

b) Beräkna d. Använd eventuellt $|\boldsymbol{F}_{\text{cor}}| \ll m\, g$.

⟨fig66⟩

$$(\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -\, 2\, m\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

(Österut) ⟨fig67⟩.

$$\boldsymbol{r} = x\, \boldsymbol{e}_x + z\, \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(0) = h\, \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{0}$$

Rörelse i $-\boldsymbol{e}_z$-led ger $\boldsymbol{F}_{\text{cor}}$ i $\boldsymbol{e}_x$-led. Efter en stund har vi

$$\boldsymbol{v} = v_z\, \boldsymbol{e}_z + v_x\, \boldsymbol{e}_x$$

$$v_x \ll v_z$$

(Jorden hinner inte flytta sig mycket under den tid det tar för kulan att falla 55 meter.)

Approximation: strunta i den $\boldsymbol{F}_{\text{cor}}$ som v_x ger upphov till.

$$z(t) = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{z} = -\, g\, t$$

$$|\boldsymbol{F}_{\text{cor}}| = 2\, m\, \omega\, v \sin\theta$$

$$m\, \ddot{z} = -\, m\, g$$

$$m\, \ddot{x} = -\, 2\, m\, \omega\, \dot{z} \sin\theta$$

$$m\ddot{x} = 2\, m\, \omega\, g\, t \sin\theta$$

$$x(t) = \frac{1}{3}\, \omega\, g\, t^3 \sin\theta$$

$z=0$ då $t=t_0$:

$$t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d=x(t_0)=\frac{1}{3}\,\omega\,g\left(\frac{2\,h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\omega\,\sqrt{\frac{h^3}{g}}\sin\theta$$

24 maj 2005:

Uppgift 2 ⟨fig68⟩ Sfärisk kropp med massa $m=10$ g och radie $r=8.0$ mm. Sitter i en fjäder med fjäderkonstant $k=0.50\,\mathrm{N/m}$. Vi har en viskös dämpningskraft från vattnet.

Laminärt flöde eller turbulent flöde?

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho\,d\,v}{\eta}$$

Där ρ är densitet, d är utsträckning och η är vätskans viskositet. "Reynoldstalet".

Om Re $\gtrsim 10^3$ har vi turbulent flöde och $F\approx\frac{1}{2}\rho C_d\mathrm{Av}^2$, för Re $\lesssim 30$ har vi laminärt flöde och $F\approx 6\pi\eta\,r\,v$.

- Visa att svängningen är svagt dämpad (ge värde på ζ) om amplituden är tillräckligt liten för att ge laminärt flöde.
- Ge ett ungefärligt maximalt värde på amplituden för att detta ska gälla.

$$m\ddot{x}=F_{\text{fjäder}}+F_{\text{vatten}}=-\,k\,x-6\pi\,\eta\,r\,\dot{x}$$

$$\ddot{x}+\frac{6\pi\,\eta\,r}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Standardform:

$$\ddot{x}+2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{x}+\omega_n^2\,x=0$$

$$2\,\zeta\,\omega_n=\frac{6\,\pi\,\eta\,r}{m}\Rightarrow\zeta=\frac{3\,\pi\,\eta\,r}{\sqrt{m\,k}}$$

$$\eta\approx 1.5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\zeta=\frac{3\,\pi\cdot 1.5\cdot 10^{-3}\cdot 8\cdot 10^{-3}}{\sqrt{10^{-2}\cdot 0.5}}\approx 10^{-3}$$

$$\mathrm{dim}\!:1\stackrel{?}{=\!=}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}\cdot\mathrm{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}}}$$

Dimension OK.

Hur stor får nu amplituden vara för att det här ska vara sant?

$$x(t)=A\,e^{-\omega_n\zeta t}\cos\!\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t+\phi\right)$$

Hastigheten beror mycket mer på att det svänger än på att amplituden minskar ($\omega_n\;\zeta\ll\omega_n$, $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\approx\omega_n$). $|\dot{x}\,|\lesssim\omega_n\,A$.

Villkor för laminärt flöde:

$$30\gtrsim\frac{\rho\,r\,\omega_n\,A}{\eta}\Rightarrow\text{villkor på }A$$