2006–05–16

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m\,\gamma}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

$$(\text{Gravitation: } \gamma = M\,G = g\,R^2)$$

⟨fig59⟩. Jorden:

$$\frac{m\,M\,G}{r^2} = \frac{m\,g\,R^2}{r^2}$$

Kepler

1. Ellipser [speciellt för $F \propto \frac{1}{r^2}$]
2. Radien sveper samma area per tidsenhet genom hela rörelsen. $\left[\dot{L} = 0\right]$
3. $\tau \propto a^{\frac{3}{2}}$, där a är halva storaxeln, τ är perioden.

2: ⟨fig60⟩.

$$\mathrm{d}A = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}\mathrm{d}t = \frac{L}{2\,m}\,\mathrm{d}t$$

$$r = \frac{L^2}{m^2\,\gamma}\cdot\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

ellips: $e < 1$. ⟨fig61⟩. $r_1 + r_2 = \text{konstant}$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$b = a\sqrt{1 - e^2}$.

$$\text{Bra att komma ihåg:}\quad \frac{L^2}{m^2\gamma} = \frac{b^2}{a} = a\left(1 - e^2\right)$$

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{m\,\gamma}{r}$$

Räkna ut E då $\dot{r} = 0$. I A, B är

$$E = \frac{1}{2}m\left(r\dot{\theta}\right)^2 - \frac{m\,\gamma}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{m\,r}\right)^2 - \frac{\gamma\,m}{r}$$

I punkten A (perihelium):

$$r_A = (1 - e)a$$

$$E = \frac{L^2}{2m\,a^2\,(1 - e)^2} - \frac{m\,\gamma}{a(1 - e)}$$

Använder $L^2 = m^2\,g\,a\,(1 - e^2)$:

$$E = \frac{m\,\gamma}{a}\left[\frac{1 + e}{2(1 - e)} - \frac{1}{1 - e}\right] = \frac{m\,\gamma}{a}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{m\,\gamma}{2a}$$

Negativa energier karakteriserar elliptiska banor.

Periodtid:

$$\mathrm{d}t = \frac{2\,m}{L}\,\mathrm{d}A$$

$$\tau = \frac{2\,m}{L}\,A = \frac{2\,m}{L}\cdot\pi\,a\,b = 2\pi\,m\,a\,b\cdot\frac{\sqrt{a}}{m\,\sqrt{\gamma}\,b} = 2\pi\,\sqrt{\frac{a^3}{\gamma}}$$

Notera ellipsarea: $\pi\,a\,b$, jämför med cirkelns $\pi\,r^2$.

$\theta(t) = ?$ — Det visar sig vara svårt.

$$\mathrm{d}\theta = \frac{L}{m\,r^2}\,\mathrm{d}t$$

r beror av θ: det blir en jobbig integral. ⟨fig62⟩Använd ψ.

$$a\cos\psi = e\,a + r\cos\theta$$

$$\mathrm{d}t = \frac{m\,r^2}{L}\,\mathrm{d}\theta$$

Integrera:

$$t = \frac{\tau}{2\pi}(\psi - e\sin\psi)$$

Viktiga uttryck:

$$\frac{L^2}{m^2\gamma} = a(1-e^2)$$

$$E = -\frac{m\gamma}{2a}$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma}}$$

Utdelad uppgift 7.17 ⟨fig63⟩.

Givet:

$$\begin{cases} v_0 = 8.60\,\mathrm{km/s} \\ r_0 \approx 6578\,\mathrm{km} \end{cases}$$

$$L = m\,r_0\,v_0$$

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - \frac{m\,\gamma}{r_0}$$

Kolla att banan är elliptisk, dvs $E < 0$!

$$E = \frac{m\gamma}{r_0}\left(\frac{v_0^2\,r_0}{2\gamma} - 1\right)$$

$$\gamma = M\,G = g\,R^2 \approx 3.970\cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$$

$$\frac{v_0^2\,r_0}{2\gamma} \approx 0.6127 \Longrightarrow E < 0$$

OK. Det är en ellips.

$$E = -\frac{m\,\gamma}{2\,a} \Longrightarrow \frac{a}{r_0} \approx 1.2911$$

$$e = 1 - \frac{r_0}{a} \approx 0.2255$$

$$r_1 = r_0 \cdot \frac{1+e}{1-e} \approx 10.4 \cdot 10^3 \mathrm{km}$$

v_1: Avnänd (t.ex.) L

$$r_0\,v_0 = r_1\,v_1 \Rightarrow v_1 \approx 0.63\,v_0$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma}} \approx 2\,\mathrm{h}$$

Exempel ⟨fig64⟩.

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - \frac{m\,\gamma}{R} = \frac{m\,\gamma}{R}\left(\frac{v_0\,R}{2\,\gamma} - 1\right)$$

Flykthastighet $\sqrt{\frac{2\,\gamma}{R}}$.

$$L = m\,R\,v_0 \cos\alpha$$

$$\frac{R}{2\,a} = 1 - \frac{v_0^2 R}{2\,\gamma}$$

$$\frac{R^2\,v_0^2 \cos^2\alpha}{\gamma} = a\,(1-e^2)$$

ger a, e.