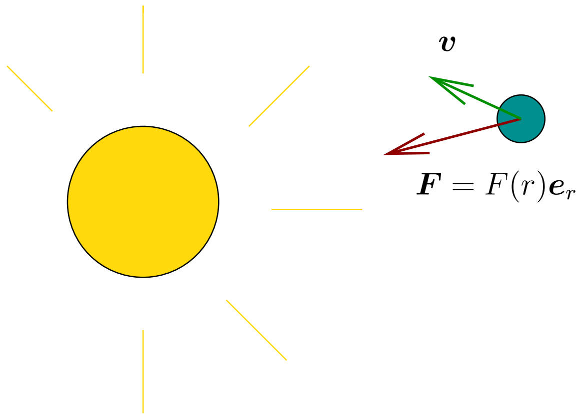
2006–05–10

Centralrörelse, planetrörelse



Figur 1.

Rörelsen försiggår i ett plan.

Idealisering: “solen” mycket tyngre än “jorden” (annars kan båda röra sig kring ett gemensamt masscentrum).

Tvåkroppsproblem $\longrightarrow$ enkroppsproblem. ⟨fig54⟩

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F} \\ m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\boldsymbol{F} \end{cases}$$

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = 0$$

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} = 0$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \frac{\boldsymbol{F}}{m_1} + \frac{\boldsymbol{F}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{F}$$

Där μ är “reducerad massa. $\mu \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Om $m_2 \gg m_1$: $\mu \approx m_1$.

I polära koordinater: ⟨fig55⟩.

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r\text{:} \quad m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) = F(r) \\ \boldsymbol{e}_\theta\text{:} \quad m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\, r^2\, \dot{\theta}\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

L är konstant under rörelsen.

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\, r^2}$$

Stoppa in i radiella ekvationen:

$$m\,\ddot{r} - \frac{L^2}{m\,r^3} = F(r)$$

$$m\,\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{m\,r^3}$$

Där $\frac{L^2}{m\,r^3}$ är *centrifugalkraft*.

$$V(r):\quad F(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

$$F(r) + \frac{L^2}{m\,r^3} = -\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}$$

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\,m\,r^2}$$

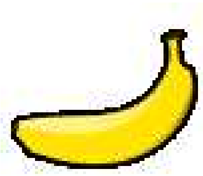
Den extra termen i den effektiva potentialen skulle vi kunna kalla "centrifugalpotential".

EXEMPEL:

$$F(r) = -\frac{\gamma\,m}{r^2},\quad V(r) = -\frac{\gamma\,m}{r}$$

⟨fig56⟩

$r(\theta) = ?$ Banan?



$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\dot{\theta} = \frac{L}{m\,r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{L}{m}\left[-\frac{2}{r^3}\cdot\dot{r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}\,\dot{\theta}\right] = \frac{L}{m}\left[-\frac{2}{r^3}\cdot\frac{L}{m\,r^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{L}{m\,r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}\right] =$$

$$= \frac{L^2}{m^2\,r^4}\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right)$$

$$\frac{L^2}{m\,r^4}\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right) = F(r) + \frac{L^2}{m\,r^3}$$

Sätt $r = \frac{1}{u} \Longrightarrow r' = -\frac{u'}{u^2} \Longrightarrow r'' = -\frac{u''}{u^2} + \frac{2(u')^2}{u^3}$.

$$\frac{L^2}{m}\cdot u^4\left(-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{2}{u^3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - 2\,u\cdot\frac{1}{u^4}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right) = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2}{m}u^3$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2\,u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

Gravitation:

$$F(r) = -\frac{m\,M G}{r^2} = -\frac{m\,\gamma}{r^2}$$

Ekvationen blir i detta fallet:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{m^2\gamma}{L^2}$$

Lösning:

$$u(\theta) = \frac{m^2\,\gamma}{L^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \theta_0) = \frac{m^2\,\gamma}{L^2}(1 + e\cos\theta)$$

Banan:

$$r(\theta) = \frac{L^2}{m^2\,\gamma} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$0 \leqslant e < 1$: Väldefinierat $r < \infty$ för alla θ. Ellips.

$e = 1$: Parabel.

$e > 1$: ⟨fig57⟩. Hyperbel.

e kallas "excentricitet".

Ellips ⟨fig58⟩.

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{x + e\,a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$r + r' = 2\,a$$

Där r är avstånd från "utgångsbrännpunkten" till en punkt, r' avstånd från andra brännpunkten till samma punkt. Man kan visa $r + r' = 2\,a \Longrightarrow (...)^2 + (\star)^2 = 1$.

Cosinussatsen:

$$(r')^2 = r^2 + 4\,e^2\,a^2 + 2\,e\,a\,r\cos\theta$$

Lös ut r:

$$r = \frac{(1 - e^2)\,a}{1 + e\cos\theta}$$

Jämför med den tidigare ekvationen för r:

$$\frac{b^2}{a} \equiv (1 - e^2)a = \frac{L^2}{m^2\gamma} \equiv \frac{r^2\dot{\theta}}{\gamma}$$

Hyperbel: $r' - r = 2\,a$ = minsta avståndet mellan hyperbelgrenarna.

"Problemet som inom kvantmekaniken kallas för 'väteatomen'." — Martin ger oss en glimt av vad kvantmekanikens stora problem.

Keplers lagar:

1. Ellipser
2. $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{konstant}$.
3. $T^2 \propto a^3$.