2006–05–09

Vanlig harmonisk svängning, fjäder upphängd i taket: $m\ddot{x} = m\ g - k\ x - c\ \dot{x}$. Termen $m\ g$ kommer bara att förskjuta jämviktsläget något och kan i de flesta sammanhang bortses ifrån.

Driven oscillator ⟨fig20060509a⟩

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m}$$

Eller med $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}}$ och $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{x} + 2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

1. Utan dämpning: $c = \zeta = 0$:

$$\ddot{x} + \omega_n^2\,x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

Homogen lösning: $x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$.

Partikulärlösning: Ansätter $x_p(t) = X \sin \omega t \Longrightarrow x_p''(t) = -\,X\,\omega^2 \sin \omega t$:

$$-\,X\,\omega^2 \sin \omega t + \omega_n^2\,X \sin \omega t = \frac{F_0}{m}\sin \omega t \quad \Longrightarrow \quad X(\omega_n^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m}$$

$$X = \frac{F_0}{m\,\omega_n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cdot \sin \omega t$$

2. Dämpad driven oscillator.

$$\ddot{x} + 2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

Betraktar den komplexa ekvationen...

$$\ddot{z} + 2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{z} + \omega_n^2\,z = \frac{F_0}{m} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

... och ansätter $z_p = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Den reella partikulärlösningen x_p får vi som $\mathrm{Im}(z_p)$.

$$\dot{z}_p = \mathrm{i}\,\omega\,Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \ddot{z}_p = -\,\omega^2\,Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$-\,\omega^2\,Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + 2\,\mathrm{i}\,\omega\;\omega_n\,\zeta\,Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \omega_n^2\,Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$Z\big(\omega_n^2 + 2\,\mathrm{i}\,\zeta\,\omega\,\omega_n - \omega^2\big) = \frac{F_0}{m}$$

$$Z = \frac{F_0}{m\big(\omega_n^2 + 2\,\mathrm{i}\,\zeta\,\omega\,\omega_n - \omega^2\big)} = \frac{F_0\big(\omega_n^2 - \omega^2 - 2\,\mathrm{i}\,\zeta\,\omega\,\omega_n\big)}{m\Big\{\big[\omega_n^2 - \omega^2\big]^2 + 4\,\zeta^2\,\omega^2\,\omega_n^2\Big\}}$$

Skriver om det på polär form:

$$Z = \frac{F_0\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+4\,\zeta^2\,\omega^2\,\omega_n^2}}{m\Big\{\big[\omega_n^2-\omega^2\big]^2+4\,\zeta^2\,\omega^2\,\omega_n^2\Big\}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$$

där

$$\varphi = \arctan\frac{-\,2\,\zeta\cdot\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$Z = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\,\zeta\,\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$$

Nu har vi

$$x_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\,\zeta\,\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}\cdot \sin(\omega t+\varphi)$$

Exempel 8.4

Ett mätinstrument sitter med fjädrar fast i ett underlag som rör sig upp och ned enligt $x_b = x_{b0}\cos\omega t$. Inför ett intertialsystem. $\langle$fig20060509$b\rangle$.

$$x_1 = x_b + x$$

$$m\,\ddot{x}_1 = -\,m\,g - k\,x = -\,m\,g - k(x_1 - x_b)$$

$$m\ddot{x}_1 = -\,m\,g - k\,x_1 + k\,x_{b0}\cos\omega t$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}\cdot x_1 = \frac{k}{m}\,x_{b0}\cos\omega t - g$$

$\omega_n^2\cos\omega t$ är den drivande kraften: driven oscillation med amplitud

$$X = \frac{F/k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{x_{b0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$x = x - x_b = \frac{x_{b0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t - x_{b0}\cos\omega t$$

Exempel 8.7

En svängande solid pendel. Momentlagen:

$$m\,k^2\,\ddot{\theta} = -\,m\,g\,\bar{r}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g\,\bar{r}}{k_0^2}\sin\theta = 0$$

Vid små vinklar gäller $\sin\theta\approx\theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g\,\bar{r}}{k_0^2}\,\theta = 0$$

Jämför med harmonisk oscillator. Pendelns egenfrekvens $\omega_n = \sqrt{\frac{g\,\bar{r}}{k_0^2}}$.

EXEMPEL 8.8

En gungbräda är fäst med en fjäder till marken i ena änden, och en fjäder till en sak i andra änden, som svänger enligt $b \sin \omega t$. ⟨fig20060509c⟩. Momentlagen:

$$\frac{m\,l^2}{12}\,\ddot{\theta} = -\,k \cdot \frac{l}{2} \sin\theta \cdot \frac{l}{2} \cos\theta - k\left(\frac{l}{2}\sin\theta - b\sin\omega t\right)\frac{l}{2}\cos\theta$$

Betraktar mycket små vinkelutslag θ:

$$\frac{m\,l^2}{12}\,\ddot{\theta} = -\,\frac{k\,l^2}{4}\,\theta - \frac{k\,l^2}{4}\,\theta + \frac{k\,b\,l}{2}\sin\omega t$$

$$\frac{m\,l^2}{12}\,\ddot{\theta} + \frac{k\,l^2}{2}\,\theta = \frac{k\,b\,l}{2}\sin\omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{6\,k}{m}\,\theta = \frac{6\,k\,b}{m\,l}\sin\omega t$$

Egenfrekvensen $\omega_n = \sqrt{\frac{6k}{m}}$. Resonans då

$$\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

n i ω_n står för "naturlig".

Sammanfattning

$$\ddot{x} + 2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

Partikulärlösning:

$$x_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\,\zeta\,\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \cdot \sin(\omega t - \phi)$$

där

$$\phi = \arctan\left[\frac{2\,\zeta\,\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$