2006–05–03

Harmoniska svängingar ⟨fig47⟩. l_0 är fjäderns ospända längd.

Kraft från fjädern på massan, $F = -\,k\,x$ (återförande). Newtons andra: $F = m\ddot{x}$ ger

$$m\,\ddot{x} = -\,k\,x$$

Detta är en andra ordningens, linjär differentialekvation. Att den är av andra ordningen kommer av accelerationen i $F = m\,a$; att den är linjär kommer av Hookes lag.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Definiera $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$. $[\omega_n] = \mathrm{s}^{-1}$. “Naturlig tidsskala” $\frac{1}{\omega_0}$. $\ddot{x} + \omega_n^2\,x = 0$.

$$x(t) = A\cos\omega_n\,t + B\sin\omega_n\,t$$

Ansats: $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \Longrightarrow \lambda^2 + \omega_n^2 = 0, \quad \lambda = \pm\,\mathrm{i}\,\omega_n$.

⟨fig48⟩. Alternativt:

$$x(t) = C\sin(\omega_n\,t + \psi)$$

där C är amplituden och ψ är fasförskjutning. A och B, alternativt C och ψ, bestäms av begynnelsevillkor.

Exempel. Krafter mellan atomer (OK approximation t.ex. för ädelgaser) ⟨fig49⟩.

Lennard-Jones:

$$V(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

Vinkelfrekvens för små svängningar nära $r = a_0$.

$$V(r) = -\,E_0 + (r - r_0)\,v'(r_0) + \frac{1}{2}\,(r - r_0)^2 V''(r_0) + \cdots = -\,E_0 + \frac{1}{2}(r - r_0)^2\,V''(r_0) + \cdots$$

$$F(r) = (r - r_0)\,V''(r_0) + \ldots$$

Detta blir en “fjäderkraft”.

Lägg till “dämpning”, en kraft som är proportionell mot v (och motriktad). ⟨fig50⟩.

$$F = -\,k\,x - c\,\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

$[m] = \mathrm{kg}$, $[k] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $[c] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $\left[\frac{k}{m}\right] = \mathrm{s}^{-2}$, $\left[\frac{c}{m}\right] = \mathrm{s}^{-1}$, $\left[\frac{(c/m)^2}{k/m}\right] = 1$, ett dimensionslöst tal.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_n}$$

$$\ddot{x} + 2\,\zeta\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = 0$$

Karakteristisk ekvation: $\lambda^2 + 2\,\zeta\,\omega_n\,\lambda + \omega_n^2 = 0$.

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right)^2 + 2\,\zeta\left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right) + 1 = 0$$

$$\lambda = \left[-\,\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\right]\omega_n$$

Tre fall:

1. $0 < \zeta < 1$
2. $\zeta = 1$
3. $\zeta > 0$

1. $\lambda = \omega_n\left[-\,\zeta \pm \mathrm{i}\,\sqrt{1 - \zeta^2}\right]$.

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos\!\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\,t\right) + B\sin\!\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\,t\right)\right]$$

$\langle$fig51$\rangle$. Svag dämpning, underkritisk dämpning.

3. Stark dämpning, överkritisk dämpning.

$\lambda = \omega_n\left[-\,\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\right] < 0$.

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

där λ_1 och λ_2 är negativa. $\langle$fig52$\rangle$.

2. $\zeta = 1$. (Kanske en smula överflödigt: det är sällan något är så exakt i fysiken.)

$$\lambda_{1,2} = -\,\omega_n$$

$$x(t) = (A + B\,t)\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}$$

Exempel. Bil, $m = 1$ ton. $\langle$fig53$\rangle$. Uppskatta rimliga värden på k, c. Ungefär kritisk dämpning är att eftersträva.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}} \approx 1$$

Kör på ett gupp. Välj tidsskala $\frac{1}{\omega_n} \approx 1\,\mathrm{s}$.

$$k = \frac{1}{4}\,m\,\omega_n^2 \approx 250\,\mathrm{N/m}$$

$$c = \frac{1}{4}\cdot 2\,\zeta\,m\,\omega_n \approx 500\,\mathrm{N/(m/s)}$$