2006–04–25

Kinematik

Beskrivning av

- läge $\longrightarrow$ koordinater
- rörelse $\longrightarrow$ hastighet
- acceleration
- ...

Translation: tre frihetsgrader; rotation: tre frihetsgrader. ⟨fig20060425a⟩

I. Fixera masscentrum G (3 koordinater).

II. Fixera en annan punkt P på kroppen. Den måste då ligga på en sfär: 2 "koordinater", t.ex. θ, φ.

III. Fixera vinkeln för rotation kring axeln genom G, P: ψ.

⟨fig20060425b⟩. "Koordinaterna" är tre vinklar — "Eulervinklar".

Exempel med bok (uppgift 7.1). Rotera (90°) kring två olika axlar — olika ordning ger olika slutresultat, olika "läge".

Translation i olika riktningar: ordinen är oväsentlig. $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}_2$: vektoraddition är kommutativ. Rotationer är inte kommutativa: rotationer är inte vektorer!

Kunde tro: ⟨fig20060425c⟩.

Räddning: Infinitesimala rotationer är vektorer! ⟨fig20060425d⟩

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Multiplicera båda led med dt:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r})\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r})\mathrm{d}t$$

Rotationsvektorn $\boldsymbol{\omega}$ beskriver "rotationshastighet" hos kroppen. Kan läggas ihop!

Analogi: ⟨fig20060425e⟩ små förflyttningar är vektorer $\Longrightarrow$ hastighet vektor $\boldsymbol{v}$. Att translationer kommuterar har att göra med att rummet är platt.

Sample Problem 7/2 ⟨fig20060425f⟩. Givet:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = L = 250\,\mathrm{mm} \\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = R = 125\,\mathrm{mm} \\ \beta = 30^\circ \\ \Omega = 2\,\pi\,\mathrm{s}^{-1} \\ \omega_0 = 4\,\pi\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases}$$

Beräkna rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$ och vinkelacceleration $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ för skivan; beräkna hastighet och acceleration för punkten A. $\langle$fig20060425$g\rangle$

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega\, \boldsymbol{e}_z + \omega_0 \cos\beta\, \boldsymbol{e}_x + \omega_0 \sin\beta\, \boldsymbol{e}_z =$$

$$= \omega_0 \cos\beta\, \boldsymbol{e}_x + (\Omega + \omega_0 \sin\beta)\, \boldsymbol{e}_z$$

Med stor försiktighet:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} = \Omega\, \boldsymbol{e}_z \times \omega_0 \cos\beta\, \boldsymbol{e}_x = \Omega\, \omega_0 \cos\beta\, \boldsymbol{e}_y$$

Punkten A snurrar med $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_0$:

$$\boldsymbol{v}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A$$

$$\boldsymbol{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A)$$

Kinematik — rotationsvektor $\boldsymbol{\omega}$.

Dynamik — "$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$". Vi behöver veta $\boldsymbol{L}$ som funktion av $\boldsymbol{\omega}$! "Nu blir det mer komplicerat".

Betrakta $\langle$fig20060425$h\rangle$. Beräkna rörelsemängdsmomentet $\boldsymbol{L}$. Vi kan konstatera att $\boldsymbol{L}_O \nparallel \boldsymbol{\omega}$.