2006–04–05

Energi för roterande kroppar ⟨fig29⟩

$$\Delta T = T' - T = W = \text{arbete}$$

Partikelmekanik:

$$T = \frac{1}{2} m\, v^2 = \text{kinetisk energi}$$

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \text{arbete vid infinitesimal förflyttning } \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

"Trick": översättningstabell mellan plan rotation och endimensionell rörelse: $m \to I, v \to \omega$.

Ren rotation:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{O}}\, \omega^2$$

där $\mathcal{O}$ är en fix punkt. Dimension: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = \mathrm{J}$, stämmer.

Bättre härledning

Från partikelsystem:

$$T = \frac{1}{2} m\, \bar{v}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 \quad (\boldsymbol{r}_i = \bar{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\rho}_i)$$

⟨fig30⟩ $|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i| = \omega\, |\boldsymbol{\rho}_i| = \omega\, \rho_i$.

$$T_{\mathrm{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, \omega^2\, \rho_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i\, \rho_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \bar{I}\, \omega^2$$

Total rörelseenergi (för plan rotation).

$$T = \frac{1}{2} m\, \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}\, \omega^2$$

Runt en fix axel:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{O}}\, \omega^2$$

Arbete, vid ren rotation:

$$\mathrm{d}W = M\, \mathrm{d}\theta$$

Endimensionell rörelse:

$$F = m\, a = m\, v\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} m\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v^2)$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2} m\, v^2 \right) = F\, \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}W$$

På motsvarande sätt:

$$I_{\mathcal{O}}\, \alpha = M_{\mathcal{O}} \Longrightarrow I_{\mathcal{O}}\, \omega\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = M_{\mathcal{O}} \Longrightarrow \mathrm{d}T = M_{\mathcal{O}}\, \mathrm{d}\theta \equiv \mathrm{d}W$$

Arbete för plan rotation:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{r}} + M_G \, \mathrm{d}\theta$$

⟨fig31⟩. Uppgift: Visa genom summation att $T = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \, \omega^2$.

Bevarade storheter: Energi E, rörelsemängd $\boldsymbol{p}$, rörelsemängdsmoment L.

E: inga dissipativa krafter/moment.

$\boldsymbol{p}$: inga yttre krafter.

L: inget moment.

Kommer av symmetrier, men det ingår inte i denna kursen.

$$\Delta \boldsymbol{p} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}t = \text{impuls}$$

$$\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} M \, \mathrm{d}t = \text{impulsmoment}$$

Sample Problem 6.9 och 6.16 är bra uppgifter.

SP 6.9 Man har ett hjul ⟨fig32⟩, start från vila. Vad är effekten av kraften F efter en sträcka $s = 3\,\mathrm{m}$? Den här kroppen har en massa egenskaper:

$$\begin{cases} m = 40\,\mathrm{kg} \\ a = \text{inre radie} \\ b = \text{yttre radie} \\ \varphi = 15° = \text{planets lutningsvinkel} \\ d = 150\,\mathrm{mm} \end{cases}$$

d är rotationsradie/*radius of gyration*: $\bar{I} = m \, d^2$. Använd energi!

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\bar{x} = a \, \theta$$

$$\bar{v} = a \, \omega$$

$$\Delta T = W = W_g + W_F$$

Eller $\Delta E = \Delta(T + \text{“}m \, g \, h\text{”}) = W_F$.

$$E = T + \text{“}m \, g \, h\text{”}$$

$$= \frac{1}{2} m \, \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \, \omega^2 + m \, g \, \bar{x} \sin \varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \bar{I} + \frac{1}{2} m \, a^2 \right) \omega^2 + m \, g \, \bar{x} \sin \varphi$$

$$\mathrm{d}W_F = F \, (a + b) \, \mathrm{d}\theta = F \left(1 + \frac{b}{a} \right) \mathrm{d}\bar{x}$$

$$P_F = F \, (a + b) \, \omega$$

Före: $\bar{x} = 0, \omega = 0$.

Efter: $\bar{x} = s, \omega = ?$

Utfört arbete:

$$W = F\left(1 + \frac{b}{a}\right) s$$

Före: $E = 0$

Efter: $E = \frac{1}{2} m \left(d^2 + a^2\right) \omega^2 + m\, g\, s \sin \varphi = F\left(1 + \frac{b}{a}\right) s$.

Lös ut ω, sätt in i effektekvationen $P_F = F(a + b)\omega$.