2006–04–04

Idag: beräkning av tröghetsmoment, Steiners sats (i boken: parallellaxelteoremet), exempel.

$L = I\,\omega$. $I\ddot{\theta} = M$. Jämför: $p = m\,v$, $m\,\ddot{x} = F$.

Standardgeometrier (homogena kroppar)

- Tunn stav ⟨fig21⟩.
- Cirkelskiva ⟨fig22⟩.
- Klot ⟨fig23⟩

Cirkelskiva med radie R och massa m. Densitet $\rho = \frac{m}{\pi\,R^2}$

$$\mathrm{d}I_o = \mathrm{d}m \cdot r^2 = \frac{m}{\pi\,R^2} \cdot 2\,\pi\,r \cdot \mathrm{d}r \cdot r^2$$

$$I_o = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\,m\,R^2$$

Den bör man kunna utantill.

SATS: (Steiners sats): ⟨fig24⟩. Antag att vi räknat ut $\bar{I}$. Vad är då I_O? Antag att kroppen roterar runt O. Då är $L_O = I_O\,\omega$. Men å andra sidan: $L_O = d \cdot m\,\omega\,d + \bar{I}\,\omega$ (masscentrums translation $\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p}$, plus rotation kring masscentrum). Detta ger då

$$\boxed{I_O = \bar{I} + m\,d^2}$$

EXEMPEL: Stav kring ena änden:

$$I_O = \frac{1}{12}\,m\,l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\,m\,l^2$$

"Vi tar det i lugn och ro så att vi hinner."

6/53 En ring roterar med vinkelhastigheten ω. Sök spänningen T i ringen! ($T = 0$ då $\omega = 0$). Observation: det behövs inre krafter för att hålla ihop ringen (motverka centrifugalkraft).

Vi söker inre krafter: vi måste ta isär ringen.

1. Frilägger halva ringen ⟨fig25⟩. Masscentrums acceleration $a = d\omega^2$

$$\frac{m}{2} \cdot d\omega^2 = 2\,T$$

Hemuppgift: visa att $d = \frac{2}{\pi}\,r$.

$$T = \frac{1}{4}\,m \cdot \frac{2}{\pi}\,r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2\,\pi}\,m\,r\,\omega^2$$

2. Infinitesimalt ⟨fig26⟩.

2005–08–26:3 ⟨fig27⟩. 2 sidostycken: homogena skivor med radie r, i mitten sitter en homogen cirkulär cylinder av radie ρ. Vi har tillräcklig friktion för rullning.

- Åt vilket håll rullar den?

- Med vilken acceleration?

Vi har *en* frihetsgrad: $x = r\,\theta$. Vi har två translationsekvationer ($\longrightarrow$ och $\Big\uparrow$) och en rotationsekvation. I $\uparrow$-led bestämmer ekvationen normalkraften från bordet. I "$\rightarrow$"-led innehåller ekvationen accelerationen och friktionskraften.

"$I\ddot{\theta} = M$". Vi kan använda masscentrum (innehåller T och F) eller punkten $\mathcal{O}$ (innehåller endast F).

6.36 ⟨fig28⟩. Vi vill att kraften skall åstadkomma ren rotation kring $\mathcal{O}$. Masscentrums translation $m\ddot{\bar{y}} = F$. Rotation kring G: $\bar{I}\ddot{\theta} = F\,(l - \bar{x})$. Vill åstadkomma $\ddot{\bar{y}} = \bar{x}\,\ddot{\theta}$.

...

$$l = \bar{x} + \frac{\bar{I}}{m\,\bar{x}} = \frac{\bar{I} + m\,\bar{x}^2}{m\,\bar{x}} = \frac{I_{\mathcal{O}}}{m\,\bar{x}}$$