2006–03–21

Stelkroppskinematik — plan rörelse.

"Böcker kan göra något som partiklar inte kan: de kan snurra!" ⟨fig7⟩

3 frihetsgrader

- 2 för translation
- 1 för rotation

En kropp som rör sig i tre dimensioner har sex frihetsgrader: tre translation, tre rotation.

Hur rör sig en punkt på en stelkropp, givet $\boldsymbol{r}, \theta, \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}, \dot{\theta} \ldots$?

Mål är att till exempel bilda $\boldsymbol{L}$.

$$\boldsymbol{r}_p = \bar{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\rho}$$

$$\boldsymbol{v}_p = \dot{\bar{\boldsymbol{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\boldsymbol{a}_p = \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{a}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}$$

Strunta (för tillfället) i translationen!

Tänk att vi har en punkt som är stilla. Placera origo där och vi kan beskriva rörelsen enbart med θ. Stel kropp ($\dot{r} = 0$):

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = r\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{v}} = r\,\ddot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha\,\boldsymbol{e}_\theta - r\,\omega^2\,\boldsymbol{e}_r$$

Fartändring riktad längs cirkeln + riktningsändring, centripetalacceleration.

Rotationsvektorn. ⟨fig8⟩.

Definition: **Rotationsvektorn** $\boldsymbol{\omega}$ har längden ω och är riktad längs rotationsaxeln enligt skruvregeln.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Är kryssprodukten associativ? Nej. "Då blir det fel." Notera att den är riktad i negativ $\boldsymbol{e}_r$-led: det är centripetalaccelerationen.

Exempel 5.3 ⟨fig9⟩

$$\omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = -\,4\,\mathrm{s}^{-2}$$

$$\boldsymbol{r} = a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\,\omega\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\alpha} = -\,\dot{\omega}\,\boldsymbol{e}_z = -\,\alpha\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\,\omega\,\boldsymbol{e}_z \times (a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y) = \omega(-\,a\,\boldsymbol{e}_y + b\,\boldsymbol{e}_x)$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -\,\alpha\boldsymbol{e}_z \times (a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y) + (-\,\omega\,\boldsymbol{e}_z) \times \omega(b\,\boldsymbol{e}_x - a\,\boldsymbol{e}_y) =$$

$$= \alpha(-\,a\,\boldsymbol{e}_y + b\,\boldsymbol{e}_x) + \omega^2(-\,b\,\boldsymbol{e}_y - a\,\boldsymbol{e}_x)$$

”Innan vi slutar skulle jag vilja visa en sak som är... bra” – därefter hissar han upp en tavla och ned en annan: samtidigt!

$v = d\,\omega$ ⟨fig10⟩.

$$|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,| = \omega\,r\sin\phi = \omega\,d$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$