2006–03–15

Partikelsystem

⟨fig5⟩

Rörelsemängd:

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \ldots = m\,\bar{\boldsymbol{v}}$$

Rörelseekvation för G:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{F}$ är summan av alla krafter på alla delar — beror endast av yttre krafter.

"H är en dum bokstav: L är en bra bokstav."

Rörelsemängdsmoment med avseende på $\mathcal{O}$:

$$\boldsymbol{L}_{\mathcal{O}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

Momentekvation:

$$\dot{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}i} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{O}i} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$\Longrightarrow \dot{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{O}} \quad \left(= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \right)$$

Här beror $\boldsymbol{M}_{\mathcal{O}}$ endast av yttre krafter!

Förhoppning (som kommer visa sig sann): 6 ekvationer räcker för att beskriva en stel kropps rörelse: 3 för translation, 3 för rotation.

En stel kropp har 6 frihetsgrader. Translation: x, y, z för masscentrums koordinater. Rotation: sfär (2 vinklar) + en vinkel = 3 vinklar.

Låt $\mathcal{O}$ vara en fix punkt, G vara masscentrum:

$$\boldsymbol{L}_{\mathcal{O}} = \ldots = m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}} + \sum_i m_i\,\boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{L}_G$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{O}}$$

$$\mathrm{VL} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}}) + \dot{\boldsymbol{L}}_G = m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{a}} + \dot{\boldsymbol{L}}_G$$

$$\mathrm{HL} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\bar{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\rho}_i) \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{M}_G$$

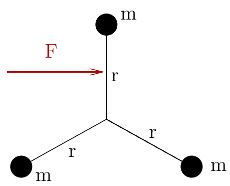
$$\boldsymbol{F} = m\,\bar{\boldsymbol{a}} \Longrightarrow \dot{\boldsymbol{L}}_G = \boldsymbol{M}_G$$

Detta går bra för fixa punkter, samt för masscentrum, men inte för allmänna punkter.

Translation: Rörelseekvation: $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$. Relation mellan $\boldsymbol{p}$ (dynamisk storhet) och $\boldsymbol{v}$ (kinematisk storhet): $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$.

Rotation: Rörelseekvation: $\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{M}_O$. Relation mellan $\boldsymbol{L}$ (dynamisk storhet) och ? (kinematisk storhet)...

Sample Problem 4.1 Igår $\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{F}{3m}\hat{\boldsymbol{x}}$.



Figur 1.

⟨fig6⟩. Plan rotation: en frihetsgrad.

$$\boldsymbol{L}_G = 3\,m\,r\cdot r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{M}_G = F\,b\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}_G = \boldsymbol{M}_G \Longrightarrow 3\,m\,r^2\,\ddot{\theta} = F\,b$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F\,b}{3\,m\,r^2}$$

Rörelseenergi:

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\bar{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)\cdot(\bar{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\bar{v}^2 + 2\,\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_i + |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2\right) = \frac{m\,\bar{v}^2}{2} + \sum_i \frac{1}{2}m_i\,|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2$$

$$\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i(2\,\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_i m_i\boldsymbol{\rho}_i = 0\right]$$