2006–03–14

System av partiklar

•1 • …
•3 N st partiklar. $3N$ frihetsgrader.
•2 • •N

Se en stel kropp som ett speciellt fall av ett partikelsystem — hur många frihetsgrader?

Stelkroppskinematik — beskriver “läge” och “rörelse” — kommer från partikelsystem.

⟨fig1⟩. För varje partikel $m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i$ där $\boldsymbol{F}_i$ är den totala kraften på partikel nummer i. Vi delar upp $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}}$ där $\boldsymbol{f}_i = \sum_j \boldsymbol{f}_{ij}$.

Lägg ihop alla ekvationerna:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{F}$$

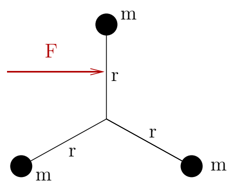
detta är total kraft $=$ total yttre kraft.

Masscentrum:

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i$$

$$\text{VL} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = m \ddot{\bar{\boldsymbol{r}}}$$

Sample problem 4.1 (Se figur 1). Vi söker masscentrums acceleration i detta ögonblick.



Figur 1.

$$\longrightarrow : m\, \bar{a} = F$$

$$\bar{a} = \frac{F}{3m}$$

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = m \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}$$

Rörelsemängdsmoment. Boken kallar rörelsemängd för G och rörelsemängdsmoment H. Vi kallar rörelsemängd p och rörelsemängdsmoment L.

$$\boldsymbol{L}_{\mathcal{O}i} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{r}_i \times m\boldsymbol{v}_i$$

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i$$

$$m_i \boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$\text{HL} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{O}i} \text{ är det vridande momentet med avseende på } \mathcal{O}$$

$$\text{VL} = \dot{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}i}$$

Lägg ihop alla:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_{\mathcal{O}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \boldsymbol{L}_{\mathcal{O}i} = \sum_i \boldsymbol{M}_{\mathcal{O}i}$$

Betrakta inre krafter ⟨fig3⟩.

$$\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{f} + \boldsymbol{r}_i \times (-\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

Således $\dot{\boldsymbol{L}}_{\mathcal{O}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{O}}$ där $\boldsymbol{M}_{\mathcal{O}}$ enbart beror av yttre krafter.

⟨fig4⟩.

$$\boldsymbol{r}_i = \bar{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\rho}_i$$

$$\boldsymbol{v}_i = \bar{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathcal{O}} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i(\bar{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\rho}_i) \times (\bar{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) =$$

$$= \sum_i m_i(\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \boldsymbol{\rho}_i \times \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) =$$

$$= m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{r}} \times \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}} + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i\right) \times \bar{\boldsymbol{v}} + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i =$$

$$[\text{masscentrum m.a.p. masscentrum}] = m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i =$$

$$= m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}} + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i =$$

$m\,\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{v}}$ är $\boldsymbol{L}_{\mathcal{O}}$ för en tänkt partikel med massan m i masscentrum och har hastigheten $\bar{\boldsymbol{v}}$. Den andra termen är rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum.