2007–11–02

Förra gången: administration, integraler.

Idag: komplex analys.

Analytisk funktion: derivatan $f'(z)$ existerar:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

det vill säga:

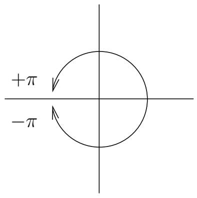
1. gränsvärdet är oberoende av hur $h \to 0$, och
2. gränsvärdet är finit.

Ej analytiska punkter:

1. Pol: Vi har en n:te ordnings pol vid z_0 om

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \text{konstant}, \neq 0$$

2. Förgreningslinje (-punkt), t.ex. $\ln z$.



Figur 1.

3. Väsentlig singularitet

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

t.ex. $\exp(1/z)$ vid $z = 0$.

Laurent-serie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergerar i en punkterad disk runt z_0 med en radie som bestämms av avståndet till närmaste singuläritet (skiljd från z_0).

Integrera runt en cirkel $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$:

$$\oint_C \mathrm{d}z\, f(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{i}\, r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, \mathrm{i}\, r^{n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}_{=2\pi\delta_{n,-1}} = 2\,\pi\,\mathrm{i}\, a_1$$

$a_1 =$ residy vid z_0. Residyteorem:

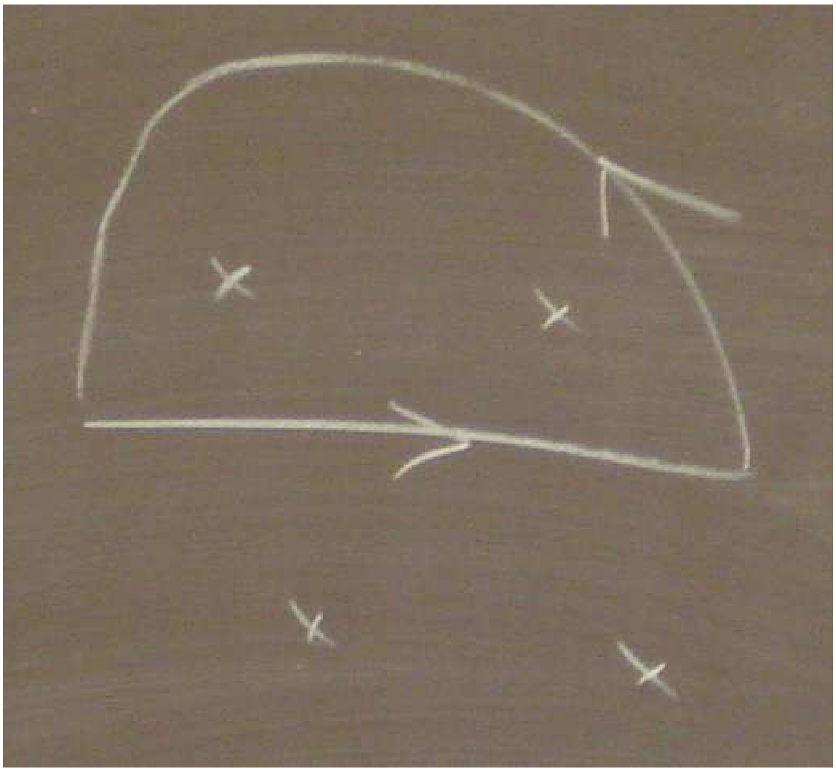
$$\oint_C \mathrm{d}z\, f(z) = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{\text{isolerade} \\ \text{singulariteter}}} a_{-1}$$

om området inom C bara innehåller isolerade singulariteter (d.v.s. inga förgreningslinjer).

Exempel:

1) standard

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{\omega^2}{L^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + R^2 \omega^2} = \ldots = \frac{1}{2\,R\,L}$$



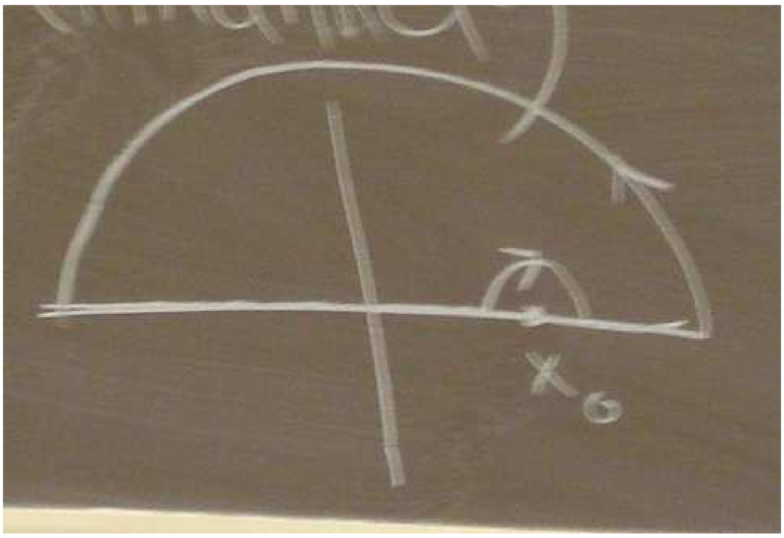
Figur 2.

2) vanlig

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} \mathrm{d}x$$

– konvergerar egentligen inte (i allmänhet).

– använd kontur C_1: ⟨fig3⟩



Figur 3.

$$I_{C_1} \quad = \quad \oint_{C_1} \mathrm{d}z \quad \frac{f(z)}{z - x_0} \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \quad \left[\quad \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} \mathrm{d}x \quad \frac{f(x)}{x - x_0} \quad + \quad \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x \quad \frac{f(x)}{x - x_0} \right] \quad +$$

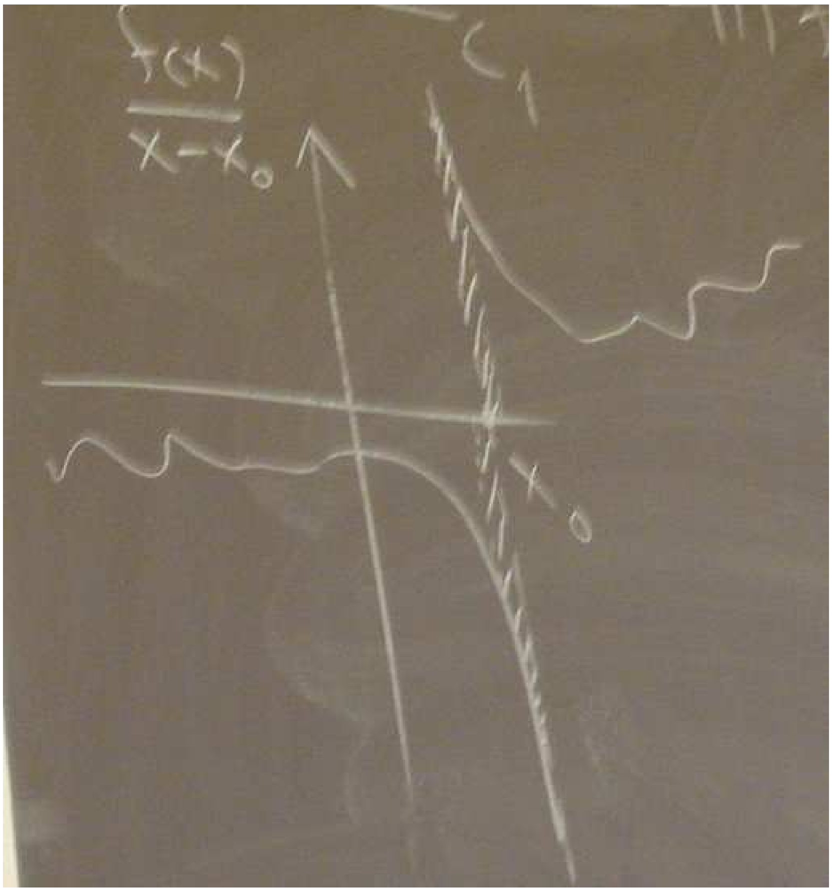
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_\pi^0 \mathrm{d}\big(\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) \frac{f(x_0 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \right] + \lim_{R \to \infty} \int_0^\pi \mathrm{d}\big(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) \frac{f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - x_0}$$

Antag $f(z) \to 0$ för $|z| \to \infty \Longrightarrow$ 4:e term $= 0$.

$f(z)$ är analytisk vid $z = x_0 \Longrightarrow$ 3:e term $= -\mathrm{i}\,\pi\, f(x_0)$.

$$\Rightarrow I_{C_1} = -\mathrm{i}\,\pi\, f(x_0) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ldots] = -\mathrm{i}\,\pi\, f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Cauchys principalvärde.



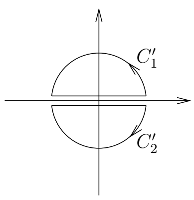
Figur 4.

Jämför med C_2: ⟨fig4⟩

Figur 5.

$$\Rightarrow I_{C_2} = +\mathrm{i}\,\pi\,f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Konturerna C_1, C_2 kan modifieras till ⟨fig6⟩ men $I_{C_1'} = I_{C_1}$ och $I_{C_2'} = I_{C_2}$.



Figur 6.

$$\oint_{C_1'} \frac{f(z)}{z - x_0} \mathrm{d}z = \lim_{\eta \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{f(x)}{x - x_0 + \mathrm{i}\eta} = -\mathrm{i}\pi f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{f(x)}{x - x_0}$$

$$\oint_{C_2'} \frac{f(z)}{z - x_0} \mathrm{d}z = \lim_{\eta \to 0^-} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{f(x)}{x - x_0 - \mathrm{i}\eta} + \mathrm{i}\pi f(x_0) + \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Operatoridentitet:

$$\lim_{\eta \to 0^+} \frac{1}{x - x_0 \pm \mathrm{i}\eta} = \mathcal{P}\frac{1}{x - x_0} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x - x_0)$$

d.v.s. inom integraltecken kan höger- och vänsterled bytas mot varandra.

3. Semi-infinit

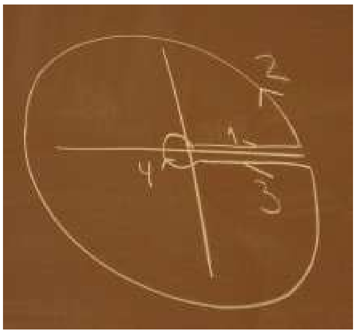
$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, f(t)$$

Anta:

1. För $\alpha > 1$:

$$\lim_{|z| \to \infty} |z|^\alpha |f(z)| = 0$$

2. $f(z)$ är analytisk på positiva realaxeln, inklusive $z = 0$.



Figur 7.

$$\tilde{I} = \oint_C \mathrm{d}z \ln(z) f(z) \quad \text{med} \quad \mathrm{Im}[\ln z] \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4$$

där $\tilde{I}_2 = 0$: $|R \ln R\, f(R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \to 0$ då $R \to 0$,

$\tilde{I}_4 = 0$: $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$.

$$\tilde{I} = \int_0^\infty \mathrm{d}t \ln t\, f(t) + \int_\infty^0 \mathrm{d}t \ln(t\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}})\, f(t) =$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}t \ln t\, f(t) + \int_\infty^0 \mathrm{d}t \ln t\, f(t) + 2\,\pi\,\mathrm{i} \int_\infty^0 \mathrm{d}t\, f(t) =$$

$$= -\,2\pi\,\mathrm{i} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, f(t) = -\,2\,\pi\,\mathrm{i}\, I$$

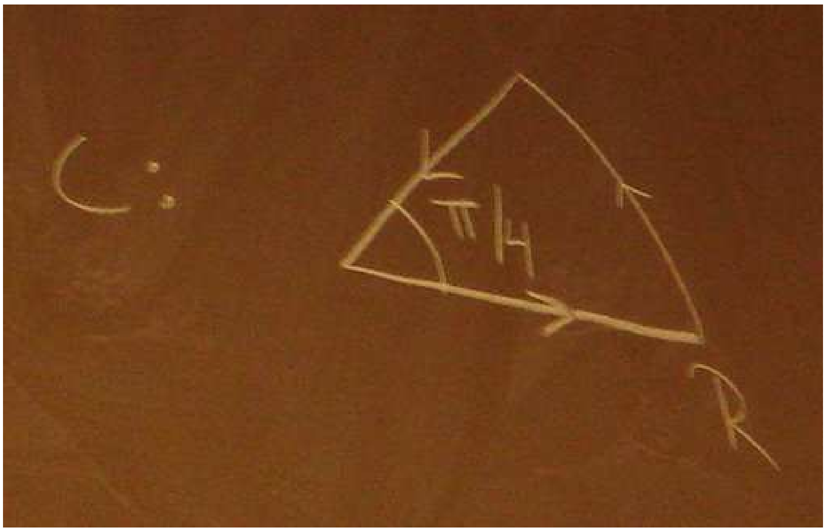
$$\Rightarrow I = -\sum_i \mathrm{Res}_{z_i}[\ln(z)\, f(z)]$$

Till exempel:

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^3 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

4. Transformation. Till exempel:

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x^2}, \quad \alpha > 0$$



Figur 8.

Inga poler:

$$0 = \oint_C \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x^2} + \int_{\theta=0}^{\pi/4} \mathrm{d}\big(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \int_\infty^0 \mathrm{d}\Big(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\Big)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x^2 \exp(\mathrm{i}\pi/2)} =$$

$$= I + \mathrm{i}\,R \underbrace{\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{-\alpha R^2 \sin(2\theta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + \alpha R^2 \cos(2\theta))}}_{\to 0,\ \text{ty}\ \exp(-\alpha R^2 \sin(2\theta))\ \text{blir mycket liten},\ R \to \infty} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$$

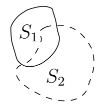
$$\Rightarrow I = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}(1+\mathrm{i})$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \mathrm{d}x \cos(\alpha x^2) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \sin(\alpha x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Analytisk fortsättning: $f_1(z)$ är analytisk i S_1, $f_2(z)$ är analytisk i S_2. För $z \in S_1 \cap S_2$:

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{för} \quad z \in S_1 \\ f_2(z) & \text{för} \quad z \in S_2 \end{cases}$$

är den entydiga analytiska fortsättningen av $f_1(z)$ och $f_2(z)$ till $S_1 \cup S_2$.



Figur 9.

Exempel:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

är analytisk för $|z| < 1$.

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}$$

är analytisk för $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z}$$

är den analytiska fortsättningen av $f_1(z)$ till $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Varför:

1. Ofta är folk något oförsiktiga och använder t.ex. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ även för $|z| \geqslant 1$. T.ex.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

2. Ibland är det lättare att räkna ut en funktion för ofysikaliska argument, och analytiskt fortsätta till det fysikaliska området.