Övning 2006–05–17

Heath 6.17 Sök

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}} (-3x_1 - 2x_2)$$

med bivillkor:

$$5x_1 + x_2 \leqslant 6 \quad (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 \leqslant 6 \quad (2)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \quad (3)$$

$$x_1 \geqslant 0 \quad (4)$$

$$x_2 \geqslant 0 \quad (5)$$

Graf: ⟨fig27⟩

Vi har 5:st hörnpunkter.

Sats: $f(\boldsymbol{x})$ antar sitt max, min i någon av hörnpunkterna. ||.

I hörnpunkten nr 1: $f(1.2, 0) = -3.6$

I hörnpunkten nr 2: $f(1.09091, 0.545455) = -4.36364$

I hörnpunkten nr 3: $f(0.85..., 0.85...) = -4.28579$

I hörnpunkten nr 4: $f(0, 1.5) = -3$

I hörnpunkten nr 5: $f(0, 0) = 0$.

Tenta 2005–05–28, uppgift 1

a) Låt V vara ett linjärt rum, H_1 och H_2 är underrum. Är $H_1 \cup H_2$ ett underrum till V?

Om ja: med $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H_1 \cup H_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in H_1 \cup H_2$. $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} \in H_1 \cup H_2$.

Om nej: motexempel.

Med $V = \mathbb{R}^2$. Låt H_1 vara x-axeln, H_2 vara y-axeln. Låt $\boldsymbol{x} = (1, 0)$, $\boldsymbol{y} = (0, 1)$. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (1, 1) \notin H_1 \cup H_2$. Svar: Nej.

b) Vi har $A A^T = I; B B^T = I$ (A och B har samma ordning). Vi har $\det(A) = -\det(B)$.

$$\det(A) = \det(A^T), \quad \det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$$

Påstående: $\det(A + B) = 0$ om $\det(A) = -\det(B)$.

$$A^T(A + B) = A^T A + A^T B = I + A^T B = (B^T + A^T) B = (B + A)^T B$$

$$\det(A^T(A + B)) = \det(A^T) \cdot \det(A + B) = \det(A) \cdot \det(A + B)$$

$$\det(A^T(A + B)) = \det((B + A)^T B) = \det(B + A)\det(B) = -\det(B + A) \cdot \det(A)$$

$$\det(A) \cdot \det(A + B) = -\det(A) \cdot \det(A + B)$$

$$A^T A = I \Longrightarrow \det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(A + B) = 0$$

Uppgift 5 Sök nollställe till $f(x) = 3\,x^3 - 2\,x^2 - 0.99$ med "Newton".

a) Ett nollställe $x^* \approx 1$. Sök "asymptotiska felkonstanten". För enkla nollställen har Newton kvadratisk konvergens.

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} \to C \quad \text{då } k \to \infty$$

Heath:

$$C \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|}$$

Vi har $f'(x) = 9\,x^2 - 4\,x$, $f''(x) = 18\,x - 4$

$$C \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(1)|}{|f'(1)|} = 1.4$$

$x_0 = 1$ och $x^* = 0.99799 \Rightarrow$

$$\frac{|x_1 - x^*|}{|x_0 - x^*|^2} \approx C = 1.4$$

$$|x_1 - x^*| \approx 1.4\,|x_0 - x^*|^2 = 1.4(1 - 0.9979)^2 \approx 5.6 \cdot 10^{-6}$$

$$|x_2 - x^*| \approx 1.4|x_1 - x^*| = 1.4(5.6 \cdot 10^{-6}) \approx 4.4 \cdot 10^{-11}$$

Räcker.

Uppgift 2 c) $F\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2, p \mapsto p'$. En linjär avbildning. Bestäm matrisen M för avbildningen F i standardbasen $\{1, t, t^2, t^3\}$.

$$\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(t) = 1 \\ F(t^2) = 2\,t \\ F(t^3) = 3\,t^2 \end{cases}$$

$$1\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t^2\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t^3\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med avseende på vår bas.

Vårt värderum $= \mathbb{P}_2$, bas $\{1, t, t^2\}$. I denna bas:

$$F(1) = 0\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(t^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Uppgift 7 Steepest descent.

Start $\boldsymbol{x}_0$. Iterera: $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}_k \cdot \alpha_k$, $\boldsymbol{d}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$, $\quad \alpha_k = \min_\alpha f(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{d}_k)$.

b) Vår $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = 3\,x_1^2 + 2\,x_2^2 - 6$. En kvadratisk funktion.

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,x_1 \\ 4\,x_2 \end{pmatrix}; \quad \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{d}_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

För kvadratiska funktioner:

$$\alpha_k = \frac{-\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{d}_k}{\boldsymbol{d}_k^T H(\boldsymbol{x}_k)\, \boldsymbol{d}_k}$$

$$H(\boldsymbol{x}_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{-\begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}} = \frac{13}{70}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{70} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Start i $(\xi, 0), (0, \eta)$ godtyckligt $\xi, \eta \implies$ en iteration räcker.