Övning 2006–05–04

Heath 8.12

Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + \frac{h^3}{6}\,f'''(x) + \cdots \tag{1}$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) - \frac{h^3}{6}\,f'''(x) + \cdots \tag{2}$$

(1) − (2):

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\,h\,f'(x) + \frac{2h^3}{6}f'''(x) + \cdots$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Detta är alltså en andra ordningens approximation.

13. $\alpha\,f(x) + \beta\,f(x+h) + \gamma\,f(x+2\,h) \approx f'(x)$

Taylor: $f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + \cdots$

$f(x+2h) = f(x) + 2h\,f'(x) + \frac{(2\,h)^2}{2}\,f''(x)$.

$$a\,f(x) + \beta\left[f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2}\,f''(x) + \cdots\right] + \gamma\left[f(x) + 2\,h\,f'(x) + \frac{(2\,h)^2}{2}\,f''(x) + \cdots\right] =$$

$$= 0\cdot f(x) + 1\cdot f'(x) + 0\cdot f''(x) + \cdots$$

Satisfiera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h \\ 0 & \frac{h^2}{2} & \frac{(2h)^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2h} \\ \frac{4}{2h} \\ -\frac{1}{2h} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2h}(-3\,f(x) + 4\,f(x+h) - 1\cdot f(x+2h)) = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ODE (rand- (senare) och begynnelsevärden)

Heath 9.1 a) $y''(t) = t + y(t) + y'(t)$; andra ordningens problem.

Standardmetod: Sätt $y' = z \Longrightarrow y'' = z' \Longrightarrow$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = t + y + z \end{cases} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ t + y + z \end{pmatrix}$$

I MATLAB:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y(2) \\ t + y(1) + y(2) \end{pmatrix}$$

b) $y''' = y'' + t\,y$. Sätt $y' = z, z' = v$.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ v \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y(2) \\ y(3) \\ y(3) + t * y(1) \end{pmatrix}$$

```
[ t, y ] = ode45(@der, [0,1], [A, B, C]' )
function yprim = der(t,y)
  yprim = [ y(2); y(3); y(3) + t*y(1) ];
```

Eller på en rad: `ode45(@(t,y)[y(2); y(3); y(3)+t*y(1)], [0,1], [A;B;C] )`.

Viktiga frågeställningar:

1. Är differentialekvationen stabil? "ODE-stabilt"
2. Är min numeriska metod stabil?
3. Noggrannheten i den numeriska metoden.

Heath 9.3 Systemet är ODE-stabilt om när det skrivs: $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}$: det gäller att A:s egenvärden har negativa realdelar. Vi har

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -2\,y_2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

A:s egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -2$ har båda negativa realdelar. Ja, ODE-stabilt.

Heath 9.4 Vi har $y' = -5\,y$, $y(0) = 1$

a) Är problemet ODE-stabilt?

-5 har negativ realdel. Svar: Ja.

b,c) Behandlar "Euler-framåt"

$$y_{k+1} = y_k + h\,y'(t_k) = y_k + h\,(-5\,y_k) = y_k(1 - 5h)$$

Är denna metod stabil?

Metoden är stabil om lösningen är *begränsad.*

$$\text{med}\,h = 0.5 \Longrightarrow y_{k+1} = (1 - 5\,h)y_k = (1 - 2.5)\,y_k = -1.5y_k =$$

$$= (-1.5)^2 y_{k-1} = \ldots = (-1.5)^{k+1} y_0 = (-1.5)^{k+1}$$

$(-1.5)^k$ är *ej* begränsad. Ej stabilitet.

c) Med $y_0 = 1 \Longrightarrow y_1 = -1.5y_0 = -1.5$.

d) Euler bakåt stabil för $h = 0.5$?

$$y_{k+1} = y_k + h(-5\,y_{k+1}) \Longrightarrow$$

$$(1 + 5\,h)\,y_{k+1} = y_k\text{:} \quad y_{k+1} = \frac{y_k}{3.5} = \left(\frac{1}{3.5}\right)^{k+1} y_0$$

$$\left(\frac{1}{3.5}\right)^k \to 0 \;\text{ då } k \to \infty \quad \text{Stabilt!}$$

e) $y_1 = \frac{1}{3.5} y_0 = \frac{1}{3.5}$. $y(t) = \mathrm{e}^{-5t}$.

Heath 9.8 Betrakta $y' = y^2$, $t > 0$; $y(0) = 1$

En icke-linjär ODE. Euler bakåt:

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1}) = y_k + h(-y_{k+1}^2)$$

$$h \cdot y_{k+1}^2 + y_{k+1} = y_k$$

Detta blir en ekvation som måste lösas i varje tidssteg. Med $y_{k+1} = x$, $h = 0.1$ och $g(x) = 0.1x^2 + x - 1 = 0$. Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{0.1x_n^2 + x_n - 1}{0.2x_n + 1}$.

$$x_n \rightarrow y_1 \approx y(0.1)$$

Startvärde till Newton?

Start till Newton via Euler-framåt:

$$y_1 = y_0 + h\,(-y_0^2) = 1 + 0.1(-1^2) = 0.9 = \text{starten till Newton}$$

$$x_0 = 0.9$$

$$x_1 = x_0 - \frac{0.1\, x_0^2 + x_0 - 1}{0.2\, x_0 + 1} = 0.9161$$

Med bara en gång Newton: $0.9161 \approx y(0.1)$.

Mathematica: `DSolve[ { y'[t] == -y[t]^2, y[0] == 1 }, y[t], t]`