2006–04–03

Egenvärden/egenvektorer

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \quad \lambda \text{ är ett egenvärde, } \boldsymbol{v} \text{ kallas egenvektor}$$

Exempel: Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Karakteristisk ekvation $\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\,\mathrm{i}$.

Egenvektorer, lös för $\lambda = \mathrm{i}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 2 & -1-\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1-\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösning: $\frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$:

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det andra egenvärdet, $\lambda = -\,\mathrm{i}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 2 & -1+\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

Lösning:

$$\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anmärkning: Om A är en reell matris gäller att egenvärden och egenvektorer förekommer komplext konjungerade. Övning: visa det.

Derivering: egenfunktion: $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ har egenvärde 1, e^{2x} är en egenfunktion med egenvärde 2.

Exempel. Egenvärden och egenfunktioner till en avbildning kan man få fram genom att bestämma egenvärden och egenvektorer till den matris som beskriver avbildningen i en given bas.

Låt $V = \mathrm{Span}\{\mathrm{e}^x, \sin x, \cos x, \mathrm{e}^x \sin x, \mathrm{e}^x \cos x\}$, med dessa funktioner som bas för V. Bestäm egenvärden och egenfunktioner till avbildningen derivering $T(f) = f'$. Vi får:

$$T(\boldsymbol{b}_1) = T(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x = \boldsymbol{b}_1$$

$$T(\boldsymbol{b}_2) = T(\sin x) = \cos x = \boldsymbol{b}_3$$

$$T(\boldsymbol{b}_3) = T(\cos x) = -\sin x = -\boldsymbol{b}_2$$

$$T(\boldsymbol{b}_4) = T(\mathrm{e}^x \sin x) = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x = \boldsymbol{b}_4 + \boldsymbol{b}_5$$

$$T(\boldsymbol{b}_5) = T(\mathrm{e}^x \cos x) = -\,\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x = -\boldsymbol{b}_4 + \boldsymbol{b}_5$$

Matrisen för avbildningen:

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}$ är block-diagonal. Egenvärdena är egenvärdena till matriserna:

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i}$$

$$\lambda_{4,5} = 1 \pm \mathrm{i}$$

Egenvektorer:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp\mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{4,5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mp\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Vi har alltså följande egenfunktioner:

- e^x med egenvärde 1,
- $\sin x - \mathrm{i}\cos x$ med egenvärde i,
- $\sin x + \mathrm{i}\cos x$ med egenvärde $-\mathrm{i}$,
- $\mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \cos x$ med egenvärde $1+\mathrm{i}$,
- $\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \cos x$ med egenvärde $1-\mathrm{i}$.

Komplexa egenvärden och egenvektorer till 2×2-matriser. Låt

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Då är $\lambda = a \pm b\mathrm{i}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \pm\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$. Låt $r = |\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$. Då kan vi skriva:

$$C = r\begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arg(\lambda) = \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$$

Avbildningen $x \mapsto C\,x$ är en rotation med en vinkel φ följt av en skalning med $r = |\lambda|$.

EXEMPEL:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad r = \sqrt{10} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C\,x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SATS: (9): En allmän 2×2-matris A med komplexa egenvärden med egenvärden $a \pm \mathrm{i}\,b, b \neq 0$ kan överföras på formen

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

genom $C = P^{-1}\,A\,P$ där

$$P = \left(\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{v}) \ \ \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}) \ \right)$$

där $\boldsymbol{v}$ är egenvektorn som hör till $a - \mathrm{i}\,b$.

EXEMPEL, FORTSÄTTNING:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenvärden $3 \pm \mathrm{i}$. Till egenvärdet $3 - \mathrm{i}$ hör egenvektorn

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 + \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \text{dvs}\, P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{och}\, C = P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Användning av diagonalisering

$$A\,\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$A \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A\,V = V D$$

$$V^{-1}\,A\,V = V^{-1}\,V D = D$$

$$A\,\text{diagonaliserbar} \Longleftrightarrow V\,\text{inverterbar} \Longleftrightarrow \text{alla egenvektorer är linjärt oberoende}$$

1. Beräkna A^k:

$$V^{-1}\,A\,V = D, \quad A = V D\,V^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = (V D\,V^{-1})\,(V D\,V^{-1}) = V D\,V^{-1} V D\,V^{-1} = V D^2\,V^{-1}$$

$$A^k = V D^k V^{-1}$$

Där

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

2. Beräkna $A^{\frac{1}{2}}$ då A är symmetrisk och positivt definit. $B = A^{\frac{1}{2}}$ är en matris sådan att $B^2 = A$. Låt $A = V D V^{-1}$ och $B = V D^{\frac{1}{2}} V^{-1}$ då OK.

3. Diskreta dynamiska system.

$$x_{k+1} = A\, x_k$$

med x_0 som start.

Exempel: (Bonusuppgift 9: rävar-kaniner).

$$r_{n+1} = 0.5\, r_n + 0.05\, k_n$$

$$k_{n+1} = 1.5\, k_n - 4\, r_n$$

Egenvärden: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$. Skriv

$$\boldsymbol{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \boldsymbol{v}_j$$

Vi kan se egenvektorerna som bas eftersom de är linjärt oberoende. $\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{x}_k = \sum_{j=1}^{n} c_j (\lambda_j)^k\, \boldsymbol{v}_j$$

Diskreta system med 2 komponenter.

Fall 1: A har egenvärden $1 > |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2|$.

$$\boldsymbol{x}_k \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{“origo attraherar”}$$

Se figur på sidan 345.

Fall 2: A har egenvärden $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 1$. Lösningarna är obegränsade då $k \to \infty$. Origo repellerar.

Fall 3: $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ “origo en sadelpunkt”.

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ med komplexa egenvärden: $|\lambda| = 1 \Longrightarrow$ elliptisk bana runt origo. $|\lambda| < 1 \Longrightarrow$ inåtgående spiral mot origo. $|\lambda| > 1 \Longrightarrow$ utgående spiral från origo.

4. Kontinuerligt dynamiskt system:

$$r' = -\,\alpha\, r + \beta\, k$$

$$k' = \gamma\, k - \delta\, r$$

Allmänt

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\, \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{start} \end{cases}$$

Om A är diagonaliserbar kan vi ta fram lösningen så här:

$$V^{-1}\,A\,V = D$$

Variabeltransformation $\boldsymbol{y} = V^{-1}\,\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = V\boldsymbol{y}$. Då gäller $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y}' = V^{-1}\,\boldsymbol{x}' = V^{-1}\;A\,\boldsymbol{x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y}' = V^{-1}\,A\,V\boldsymbol{y} = D\,\boldsymbol{y}$$

Systemet ser ut:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1\,y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n\,y_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1' = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = c_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Återtransformeringen till x-variabler:

$$\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{y} = y_1\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\,\boldsymbol{v}_n$$

Koefficienterna $c_1, \ldots, c_n$ kan bestämmas från givna startvärden vid tiden 0, dvs x_0.