

2006–03–20

Linjära rum, underrum, affin mängd

Linjära avbildningar; nollrum och värderum

Repetition Linjärt oberoende, bas, dimension, rang och basbyte, Gauss elimination.

Lay avsnitt 4.9 om Markovkedjor läses endast av dem som väljer bonusuppgift 4.

“Idag blir det lite mera... nytt.”

Lay 2.5 LU -faktorisering.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ faktoriseras: $A = LU$ där L är nedåt triangulär med ettor på diagonalen och U är en uppåt trappstegsmatrix. L är inverterbar.

ANVÄNDNING: $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sätt $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$:

$$\begin{cases} U\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ L\mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}$$

Systemen $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ och $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ är enkla att lösa eftersom de är “triangulära”.

Om man har många system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med samma matrix A men olika högerled \mathbf{b} gör man LU -faktorisering *en* gång, sedan löser man de triangulära systemen för varje \mathbf{b} .

LU -faktorisering görs som Gausselimination:

Radreduktion med elementära nedåt triangulära matriser.

$$E_p \cdots E_2 E_1 A = U \quad (\star)$$

där E_1, \dots, E_p representerar p steg i Gausseliminationen. Då är

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU$$

där $L = (E_p \cdots E_1)^{-1}$ är nedåt triangulär.

OBSERVERA:

$$E_p \cdots E_1 L = I$$

Radoperationerna i (\star) reducerar L till I .

Så här gör vi LU -faktorisering:

1. $A \rightarrow U$ genom radreduktion
2. Definiera L så att $L \rightarrow I$ med samma operationer som i 1.

EXEMPEL

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 10 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Om vi tittar på första steget i eliminationen:

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 10 & -1 \end{pmatrix} \text{ med } E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Heath, kapitel 2 Numerisk lösning av linjära ekvationssystem.

Numeriska aspekter

- effektivitet, snabbhet
- noggrannhet

Algoritm: I allmänhet Gausselimination.

Anmärkning: Ofta har man speciella matriser: stora, glesa — då används speciella, iterativa metoder (Heath kapitel 11, ingår inte i kursen).

Gausselimination är *stabil* endast om man använder så kallad *pivotering*. Detta innebär att man inför varje steg byter rader så att man får så stort pivotelement (till beloppet) som möjligt.

EXEMPEL:

$$\begin{cases} -0.001x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Räkna med tre siffrors precision. Exakt lösning:

$$x = \frac{1000}{1001} = 1.00$$

$$y = \frac{1002}{1001} = 1.00$$

Gausselimination “utan att tänka”:

$$\begin{cases} -0.001x + y = 1 \\ (1000 + 1)y = 1000 + 2 \end{cases}$$

3 siffror:

$$\begin{cases} -0.001x + y = 1 \\ 1000y = 1000 \end{cases} \implies y = 1 \implies x = 0 \text{ Totalt Fel!}$$

Lösning: Pivotering, dvs radbyte.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -0.001x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 2 \\ (1 + 0.001)y = 1 + 0.002 \end{cases}$$

Avrundat:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 1.00y = 1.00 \end{cases} \implies y = 1.00 \implies x = 1.00$$

EXEMPEL på Gausselimination med pivotering.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{byt } 1 \leftrightarrow 3]{\text{pivotering}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \implies \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ANMÄRKNING: Utan pivotering:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Vi måste göra radbyte.

LU -faktorisering genom Gausselimination:

$$PA = LU$$

där P är en permutationsmatris som anger radbytena. I vårt exempel är

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tumregel: byte rad $1 \leftrightarrow 3$ i enhetsmatrisen.

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVERA: I allmänhet måste man se upp med att senare byten även byter element i L -matrisen. I MATLAB: får man faktorerna genom “[L, U, P] = lu(A)”.

Sammanfattning: Lösning av $Ax = b$ med LU -faktorisering och pivotering görs i tre steg.

1. $PA = LU$, Gausselimination med radbyten.
2. $Ly = Pb$
3. $Ux = y$

2 och 3 är triangulära system att lösa för varje högerled.

Beräkningsarbete för LU -faktorisering av $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Antal flops (flyttalsoperationer):

Steg 1 kräver $\approx \frac{2n^3}{3}$ operationer.

Steg 2 och 3 kräver $\approx n^2$ operationer vardera.

Slutsats: Vid många högerled med samma matris tjänar man mycket på att faktorisera en gång.

ANMÄRKNING: Inversen till en matris behövs väldigt sällan; behövs inte för att lösa ekvationssystem.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Trivialt exempel: $3x = 21$.

Inversionslösning: $x = \frac{1}{3} \cdot 21 \approx 0.333 \cdot 21 = 6.993$

Divisionslösning (backslash): $x = 21/3 = 7$.

2.3 i Heath vektor- och matrisnormer

$$\|\mathbf{x}\|_2 = |\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

längd, 2-norm.

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

1-norm.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

maxnorm, ∞ -norm.

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

lp-norm.

Matris-normer ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) definieras utifrån givna vektornormer.

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Olika vektornormer ger olika matrisnormer.

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max \text{kolonnsumma}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max \text{radsumma}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad \text{där } \lambda_{\max} \text{ är största egenvärde till } A^T A$$