2006–10–18

Cauchy-Riemann som tillräckligt villkor för analyticitet

$f\colon D \to \mathbb{C}$, $f = u + \mathrm{i}v$; $u, v \in \mathcal{C}^1(D)$. u, v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

$\Longrightarrow f$ är analytisk i D.

Bevis. (Bygger på reella taylors formel)

$$?\exists \quad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \forall z_0 \in D$$

$\Delta z = h + \mathrm{i}k, \quad \Delta z \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow h, k \longrightarrow 0.$

$z_0 \in D, z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$

$u, v \in \mathcal{C}^1(D)$

$$\Rightarrow \quad u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0) + h\, \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + k\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + h\, \varepsilon_1 + k\, \varepsilon_2$$

$$v(x_0 + h, y_0 + k) = v(x_0, y_0) + h\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + k\, \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + h\, \varepsilon_3 + k\, \varepsilon_4$$

$\varepsilon_j = \varepsilon_j(x_0, y_0, h, k) \longrightarrow 0$ då $h, k \longrightarrow 0$.

$f = u + \mathrm{i}v$:

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + h\, \frac{\partial u}{\partial x} + k\, \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}h\, \frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}k\, \frac{\partial v}{\partial y} + h\, (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3) + k(\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)$$

Cauchy-Riemann:

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + (h + \mathrm{i}k)\, \frac{\partial u}{\partial x} + (\mathrm{i}h - k)\, \frac{\partial v}{\partial x} + h(\, \varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2) + k(\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)$$

$h + \mathrm{i}k = \Delta z$, $f'(z) = u'_x + \mathrm{i}\, v'_x$:

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + \Delta z\, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0, y_0) + h(\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3) + k\, (\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)$$

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0, y_0) + \frac{h}{\Delta z}(\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3) + \frac{k}{\Delta z}(\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)$$

$$\left|\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0, y_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{h}{\Delta z}(\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3) + \frac{k}{\Delta z}(\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|) + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}(|\varepsilon_2| + |\varepsilon_4|) \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + |\varepsilon_4| \longrightarrow 0 \text{ då } \Delta z \to 0$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0)$$

$\Rightarrow f$ är analytisk i D. $\square$

$\sum \frac{1}{n^2}$ har $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$, men är konvergent ändå.

CAUCHY-GOURSATS SATS. f analytisk i D; γ enkel, sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$, ligger i D med sitt inre.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Bevis. Vi har visat Cauchys sats: $f \in \mathcal{C}^1$. Tidigare. $\square$

ML-olikheten: verktyg. γ längd L, $|f| \leqslant M$ på γ:

$$\Longrightarrow \left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant ML$$

Deformation av kontur: f analytisk på och mellan γ_1 och γ_2

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

MORERAS SATS. $f \in \mathcal{C}(D)$,

$$\int_{\substack{\text{alla}\\\text{trianglar}\\\text{i } D \text{ med}\\\text{sitt inre}}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$\Longrightarrow f$ är analytisk i D.

Bevis. Tag $z_0 \in D$. Definiera

$$F(z) = \int_{z_0}^z F(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

längs sträckan från z_0 till z. Vill visa $\exists F'(z) = f(z)$.

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

Notera att det sista steget använder att $\int_{\text{triangeln}} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z))\mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|} \max_{\zeta \in \text{sträckan}} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |\Delta z|$$

f kontinuerlig: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon |\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

$\Delta z \to 0$. Man kan utan inskränkning anta $|\Delta z| < \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \zeta \in \text{sträckan } |\zeta - z| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \forall \zeta \in \text{sträckan } |f(z) - f(z)| < \varepsilon \Longrightarrow \max |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

För godtyckligt $\varepsilon > 0$:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| < \varepsilon \quad \text{för } |\Delta z| < \delta_\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

$\Longrightarrow F$ är analytisk $\Longrightarrow \exists F^{(k)}$ för godtyckligt k $\Longrightarrow f$ analytisk. $\square$

Cauchys integralformel f analytisk i D, γ enkel, sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$, ligger i D med sitt inre, moturs. $z_0 \in D$, z_0 omringas av γ.

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \mathrm{d}z$$

Cauchys formler för derivatorna:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Taylorserie f analytisk i D, $\operatorname{dist}(z_0, \partial D) = R$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

Analytiska funktioners nollställen är isolerade.

Laurentserier: f är analytisk i $0 \leqslant r \leqslant |z-z_0| < R \leqslant \infty$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Punkterad omgivning: $0 < |z-z_0| < R$.

$$f(z) = \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \cdots$$

Här är $a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f$.

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$$

RESIDYSATSEN f analytisk på γ, inuti γ finns det ändligt många isolerade singulariteter z_1, ..., z_k

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_j} f$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad g, h \text{ analytiska} \quad \Longrightarrow h\text{:s nollställen är poler till } f \text{ (efter förkortning)}$$

Argumentprincipen ... Innanför γ:

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z)$$

Varför? Jo för båda är lika med

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z \quad \text{(den logaritmiska indikatorn)}$$

Rouchés Sats: γ; f, g analytiska på och innanför γ. $|g| < |f|$ på γ.

$$\Longrightarrow f \text{ och } f \pm g \text{ har lika många nollställen innanför } \gamma$$

Algebrans Fundamentalsats. P polynom, $\deg P \geqslant 1$

$$\Longrightarrow \exists z_0\colon \quad P(z_0) = 0 \quad \text{i } \mathbb{C}$$

($\exists$ exakt n nollställen räknade med multiplicitet)

Bevis.

1) Liouvilles sats.

2) Rouchés sats. $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$.

$a_n z^n$-termen är dominant för stora $|z|$. $f(z) = a_n z^n$. Resten $= g(z)$.

Tag en stor cirkel med radie R. På C_R kommer $|f| > |g|$ (se boken för detaljer).

$$\Longrightarrow f + g = P \text{ och } f \text{ har lika många nollställen innanför } C_R, \text{ dvs } n \text{ st.}$$

Utanför C_R? $P(z) \longrightarrow \infty$ då $z \to \infty$ $\Longrightarrow |P| > \sqrt{173\pi}$ när $|z| > R$. $\square$