2006–10–12

Uppgift 2.6.14

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2\,x+5}\,\mathrm{d}x$$

⟨fig1⟩

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log_* z}}{z^2+2\,z+5}$$

$\log_*$: snitt $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, i ena gränsen den övre kanten av snittet, i det andra den nedre (tänk Riemann-yta).

$$2\,I=2\,\pi\mathrm{i}\sum_{\mathbb{C}}\ \mathrm{Res}\,f$$

$$z^2+2\,z+5=0$$

$$(z+1)^2+4=0$$

$$z_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}=\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{i}\right)$$

$$z_1=\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$z_2=\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\varphi)}$$

Enkelpoler till f. Täljaren $\neq 0$ i $z_{1,2}$. Nämnaren har enkla nollställen $z_{1,2}$.

$$\Longrightarrow \mathrm{Res}_{z_k} f=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log_* z_k}}{2\,z_k+2}$$

$$\mathrm{Res}_{z_1} f=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{5}+\mathrm{i}\,\varphi\right)}}{-2+4\mathrm{i}+2}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\sqrt[4]{5}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\varphi}$$

$$\mathrm{Res}_{z_2} f=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{5}+\mathrm{i}(2\pi-\varphi)\right)}}{-2-4\mathrm{i}+2}=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\sqrt[4]{5}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\varphi}$$

$$2\,\pi\,\mathrm{i}(\mathrm{Res}_{z_1}f+\mathrm{Res}_{z_2}f)=2\,\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\,\mathrm{i}}\cdot\sqrt[4]{5}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right)=\sqrt[4]{5}\,\pi\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=\sqrt[4]{5}\,\pi\left(+\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\right)=\pi\sqrt[4]{5}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}$$

φ är en konkret vinkel med $\cos\varphi<0,\sin\varphi>0\Longrightarrow\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\Longrightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\cos\frac{\varphi}{2}>0.$

Uppgift 2.6.24

$$\frac{P}{Q},\quad P,Q\text{ polynom},\quad \deg P\leqslant n-2,\quad \deg Q=n$$

$$?\sum_{k=1}^{n}\ \mathrm{Res}_{z_k}\frac{P}{Q}=0$$

$z_1, \ldots, z_n$ är nollställena till Q som antas vara olika. ⟨fig2⟩

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k} \frac{P}{Q} = \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z$$

där R är så stort att alla z_k ligger innanför C_R.

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{|a_{n-2}|R^{n-2} + |a_{n-3}|R^{n-3}| + \cdots + |A_0|}{|b_n|\,R^n - |b_{n-1}|\,R^{n-1} - \cdots - |b_0|} \cdot 2\pi R \longrightarrow 0 \text{ då } R \to \infty$$

Summan är oberoende av R. $\Longrightarrow$ summan $= 0$.

$f(z)$ analytisk i $\mathbb{C}$ utom i ändligt många punkter $z_1, \ldots, z_n$. $R > |z_k|, k = 1, \ldots, n$

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Res}_{z_k} f}_{a_{-1}^{(k)}}$$

⟨fig3⟩.

Utveckla teorin för ∞.

DEFINITION: $f(z)$ har samma typ av singularitet i ∞ som $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ har i 0.

||.

Möbiusavbildningar avbildar (par av) inversa punkter på (par av) inversa punkter.

⟨fig4⟩ $OP \cdot OP' = r^2$, P och P' är inversa till varandra. O och ∞ är inversa till varandra.

$|a| \neq 1 \Longrightarrow a, \frac{1}{\bar{a}}$ är varandras inverser, 0 och ∞ är varandras inverser.

Finn alla Möbiusavbildningar som avbildar enhetsskivan på sig själv. ⟨fig6⟩.

$$a = T^{-1}(0), \quad |a| < 1, \quad a \xmapsto{T} 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\bar{a}} = T^{-1}(\infty), \quad \left|\frac{1}{\bar{a}}\right| > 1, \quad \frac{1}{\bar{a}} \xmapsto{T} \infty$$

Betrakta avbildningen

$$\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

$a \mapsto 0$, $1/\bar{a} \mapsto \infty$.

1.2.21b:

$$\left|\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}\right| = 1 \Longleftrightarrow |z| = 1$$

$\Rightarrow T_0(z)$ avbildar enhetsskivan på sig själv.

Alla Möbiusavbildningar som söks:

$$T(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

Om $a=0$: $T(z)=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.

SATS: f analytisk funktion, som är bijektiv från enhetsskivan Δ till enhetsskivan Δ:

$$\Rightarrow f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

för något a: $|a|<1$, något $\theta\in\mathbb{R}$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Bevis.

$$\Phi(w)=\frac{\alpha-w}{1-\bar{\alpha}w}$$

$$\Phi(f(z))=\frac{\alpha-f(z)}{1-\bar{\alpha}f(z)}=g(z)$$

Välj $\alpha=f(0)$.

$$g(z)=\frac{\alpha-f(z)}{1-\bar{\alpha}\,f(z)}$$

$$\Delta\xrightarrow{f}\Delta\xrightarrow{\Phi}\Delta$$

$$\Longrightarrow g\colon\Delta\to\Delta$$

$(g\colon\Delta\to\mathbb{C}, |g(z)|<1)$ $g(0)=0$. g är analytisk.

$\Longrightarrow$ Enligt Schwarz' lemma: $|g(z)|\leqslant|z|\forall z\in\Delta$.

g^{-1}: finns ty både f och Φ är inverterbara. $g^{-1}=f^{-1}\circ\Phi^{-1}$, $g^{-1}\colon\Delta\to\Delta$ analytisk.

$$g^{-1}(0)=f^{-1}(\Phi^{-1}(0))=f^{-1}(\alpha)=0$$

$\Longrightarrow$ Enligt Schwarz' lemma $|g^{-1}(z)|\leqslant|z|$.

$$|g(z)|\leqslant|z|=\left|g^{-1}(g(z))\right|\leqslant|g(z)|$$

Det måste stå likheter överallt. $|g(z)|=|z|\forall z\in\Delta$.

$\Longrightarrow$ Enligt Schwarz' lemma: $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}z$, $\varphi\in\mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}z=\frac{\alpha-f(z)}{1-\bar{\alpha}f(z)}$$

Lös ut $f(z)$.

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

□

Uppgift 3.4.2 Finn alla bijektiva analytiska funktioner som avbildar det övre halvplanet på det övre halvplanet.

Möbiusavbildningar ⟨fig7⟩ "Cirklar behöver inte vara cirklar."

$p\mapsto\mathrm{i}$, $\bar{p}\mapsto-\mathrm{i}$.

⟨fig8⟩.

f: öhp $\longrightarrow$ öhp.

Vi tar ett konkret $T\colon\Delta\to$ öhp.

$$T^{-1}\circ f\circ T\colon\quad\Delta\longrightarrow\Delta$$

$$(T^{-1}\circ f\circ T)(w)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{a-w}{1-\bar{a}w}$$

$$\Longrightarrow f(T(w))=T\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{a-w}{1-\bar{a}w}\right)$$

Sedan är det bara att kalla $T(w)$ för z.

ÖVNING: Finn alla Möbiusavbildningar från det övre halvplanet till enhetsskivan. (Använd par av inversa punkter.)