2006–09–27

Uppgift 2.4.2 Multiplicitet för alla nollställen till $(\mathrm{e}^z - 1)^2$.

1. Taylorutveckla kring 0:

$$\mathrm{e}^z - 1 = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots - x$$

$$(\mathrm{e}^z - 1)^2 = z^2 + \cdots \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0 \text{ är nollställe med multiplicitet } 2.$$

2. $\mathrm{e}^z - 1 = 0$ ger $z_k = 2\,\pi\,\mathrm{i}\,k, k \in \mathbb{Z}$.

$$f(z_k) = 0$$

$$f'(z_k) = 2\,(\mathrm{e}^{z_k} - 1) \cdot \mathrm{e}^{z_k} = 0$$

$$f''(z_k) = 2\,(\mathrm{e}^{z_k})^2 + 2\,(\mathrm{e}^{z_k} - 1) \cdot \mathrm{e}^{z_k} = 2\,\mathrm{e}^{2 z_k} \neq 0$$

Alla nollställen ges av $z_k = 2\,k\,\pi\,\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$, alla har multiplicitet 2.

$$\left(\frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)^2} \text{ har poler av ordning 2 i } z_k, k \in \mathbb{Z}\right)$$

Uppgift 2.4.6 $f(z) = \mathrm{Log}(1 - z)$. ⟨fig1⟩ Sök nollställen, $|z| < 1$.

$$\mathrm{Log}(w) = 0$$

$$\mathrm{VL} = \ln|w| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,w, \qquad -\pi < \mathrm{Arg}\,w < \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln|w| = 0 & \Longleftrightarrow \quad |w| = 1 & \Longleftrightarrow \quad |1 - z| = 1 \\ \mathrm{Arg}\,w = 0 & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Arg}(1 - z) = 0 & \Longleftrightarrow \quad \arg_*(z - 1) = \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 0$$

$(0 < \arg_* < 2\pi)$.

Multiplicitet:

$$(\mathrm{Log}(1 - z))'\Big|_{z=0} = \frac{1 \cdot (-1)}{1 - z}\Big|_{z=0} \neq 0$$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \text{ kring } 0, \quad 1 \leqslant x < 1$$

$$\mathrm{Log}(1 - z) = 0 - z - \frac{z^2}{2} - \cdots \text{ kring } 0,\ |z| < 1$$

Uppgift 2.4.12 Taylorutveckla $\frac{z^2}{1 - z}$ kring 0.

$$f(z) = z^2 \cdot \frac{1}{1 - z} = z^2\,(1 + z + z^2 + \cdots) = z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

Geometrisk serie konvergerar då $|z| < 1$. Alternativt: Analytisk funktion med första singularitet i $z = 1$ $\Rightarrow$ konvergerar då $|z| < 1$.

Uppgift 2.5.22.c Laurentutveckla

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}$$

i $2<|z|<\infty$. (Kring 0, i potenser av z.)

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-1-z-z^2-\cdots$$

Men den utvecklingen kommer inte att konvergera i det intressanta området. Den kräver $|z|<1$, vi har $|z|>2$.

$$\frac{1}{z-1}=[\text{“Det här är ett trick som man får lära sig”}]=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$
$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

Den kräver $|\frac{1}{z}|<1\Longleftrightarrow|z|>1$, vilket är uppfyllt i $2<|z|<\infty$.

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=1-z+z^2-\cdots$$

Kräver $|z|<1$.

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)$$

Konvergerar om $|-\frac{1}{z}|<1\Longleftrightarrow|z|>1$ uppfyllt.

⟨fig2⟩

Uppgift 2.5.22.d. Laurentutveckla $\exp(z+\frac{1}{z})$. Har en singularitet, $z_0=0$. Vi kan utveckla kring 0 i området $0<|z|<\infty$.

$$\mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots\right)=$$

Serieutvecklingen blir oändlig åt båda håll. Vi får en *väsentlig* singularitet.

$$=\cdots+\underbrace{\left[1+\frac{1}{2!\cdot1!}+\frac{1}{3!\cdot2!}+\cdots\right]}_{a_{-1}=\underset{0}{\mathrm{Res}}\,f}\frac{1}{z}+\left[1+1+\frac{1}{(2!)^2}+\cdots+\frac{1}{(n!)^2}+\cdots\right]+\left[1+\frac{1}{2!\cdot1!}+\frac{1}{3!\cdot2!}+\cdots\right]z+\cdots$$

Uppgift 2.5.23.a Laurent i två områden: $1<|z|<2$ och $2<|z|<\infty$.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-z-2}=\frac{z+2}{(z-2)(z+1)}\overset{P.B.U.}{=\!=}\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+1}$$

1. $1<|z|<2$:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)\qquad|z|>1$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{z}{2}-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)\qquad\left|\frac{z}{2}\right|<1\Longleftrightarrow|z|<2$$

2. $|z| > 2 > 1$. För det första partialbråket duger utvecklingen ovan.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \cdots\right) \qquad \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| > 2$$

Plocka ihop.

Residykalkyl för att räkna på reella integraler.

RESIDYSATSEN. f analytisk på γ, som är en enkel, sluten kurva. f är analytisk innanför γ, utom i ändligt många punkter $z_1, \ldots, z_k$.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z_j} f$$

Bevis. ⟨fig3⟩.

$$\int_\gamma = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} = \sum_{j=1}^{k} 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_j} f \qquad \square$$

Typer av reella integraler (i kursen)

1. (R någon rationell funktion.)

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}z = \left[\begin{array}{ll} z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & [0, 2\pi] \rightsquigarrow \{|z| = 1\} \\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{i}\,z}\mathrm{d}z & \end{array}\right] = \int_{|z|=1} \tilde{R}(z)\mathrm{d}z$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Q har inga reella nollställen (det hade gett en divergent integral). $\deg Q \geq \deg P + 2$.

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{Bmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$

Q har inga reella nollställen, $\deg Q \geq P + 1$.

4.

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x)^p\,\mathrm{d}x$$

5.

$$\int x^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

p.v. = *principal value*. v.p. = *valeur principale*.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\cancel{\ln} |x|]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Integralen är i högsta grad divergent. ⟨fig4⟩.

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \quad \text{OK}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0\\ M\to\infty\\ N\to\infty}} \left(\int_{-M}^{-\delta} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) \quad \text{Finns inte!}$$

Cauchys principalvärde innebär att man väljer symmetrisk, som i ⟨fig4⟩.

6.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)}$$

Uppgift 2.6.2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - 4x^2 + 5} \mathrm{d}x$$

Om en integral är konvergent, får man välja symmetriska gränser. ⟨fig5⟩.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 4z^2 + 5}$$

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

$$C_R \colon \begin{cases} z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ \text{då } R\to\infty}} + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\to 0 \text{ då } R\to\infty} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{sing i öhp}} \operatorname{Res} f$$

$$z^4 - 4z^2 + 5 = 0$$

$$(z^2 - 2)^2 + 1 = 0$$

$$z^2 - 2 = \pm\mathrm{i}$$

$$z^2 = 2 \pm \mathrm{i}$$

Två ekvationer:

$$z^2 = 2 + \mathrm{i}$$

Ansätt $z = a + b\,\mathrm{i}$.

$$\operatorname{Re}(z^2) = a^2 - b^2 = 2$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2ab = 1$$

$$|z^2| = \sqrt{5} = a^2 + b^2$$

Uppgift $f(z) = z^3 - 6z^2 + 4z - 3$. Taylorutveckla kring 1. Antingen:

1. Beräkna $f(1), f'(1), f''(1), f'''(1)$.
2. Potenser av $z - 1 = t$. $z = t + 1$ insättes.