2006–09–20

TAYLORS SATS: $f: D \to \mathbb{C}$ analytisk, $z_0 \in D$, $\{|\zeta - z_0| < R\} \subset D$ (R kan maximalt vara dist(z_0, ∂D).

$$\Longrightarrow f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

$$\forall z \in \{|\zeta - z_0| < R\}$$

och

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

γ är en enkel sluten kurva, omringar z_0, $\gamma \subset D$ med sitt inre.

||.

Taylorutveckling av e^{z^2} kring 0, $R = \infty$.

$$\mathrm{e}^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{n!} + \cdots$$

Fråga: Är detta Taylorutvecklingen av e^{z^2}.

SATS (entydighet): f analytisk i $\{|\zeta - z_0| < R\}$,

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots \qquad \text{i} \quad \{|\zeta - z_0| < R\}$$

$$\Longrightarrow \text{Detta är } f\text{:s Taylorutveckling kring } z_0$$

Bevis. $f(z_0) = b_0$.

Potensserier kan deriveras termvis innanför konvergensskivan.

$$\Longrightarrow f'(z) = b_1 + 2\,b_2(z - z_0) + \cdots + n\,b_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots$$

$$\Longrightarrow f'(z_0) = b_1$$

På samma sätt $f''(z_0) = 2\,b_2, \ldots$ Induktivt får vi $f^{(n)}(z_0) = n! \cdot b_n$:

$$\Longrightarrow b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n$$

Vi har alltså entydighet för potensserieutvecklingar. $\square$

EXEMPEL (kring 0)

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 - \cdots - z^n - \cdots$$

konvergent då $|z| < 1$.

||.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \quad \text{(sist)}$$

||.

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = 1 + 2\,z + 3\,z^2 + \cdots$$

alternativt:

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} =$$

$$= (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + z^2 + \cdots) =$$

$$= 1 + (1+1)\,z + (1+1+1)z^2 + \cdots$$

||.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})\,(z+\mathrm{i})} = \frac{A}{z-\mathrm{i}} + \frac{B}{z+\mathrm{i}}, \quad A, B \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots$$

||.

$$\frac{1}{z^2 - z + 1} \quad \text{komplexa nollställen till nämnaren, partialbråksuppdela}$$

||.

$$\frac{2z-3}{z^2+1} = (2\,z-3)\left(1 - z^2 + z^4 - \cdots\right)$$

||. Rationella funktioner kring 0 — klart.

$$\frac{1}{z-1} \quad \text{kring } 2$$

$$\Longleftrightarrow \text{vill ha en utveckling av potenser av } z-2$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{1+(z-2)} = 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \cdots$$

konvergerar då $|z-2| < 1$.

||. "kring z_0" $\Longleftrightarrow$ i potenser av $(z-z_0)$ $\Longleftrightarrow$ i termer av avvikelsen $z - z_0$.

Nollställen till analytiska funktioner

Nollställens multiplicitet:

Om P är ett polynom och $P(z_0) = 0 \Longleftrightarrow P(z) = (z - z_0)\,Q(z)$. (Faktorsatsen för polynom.)

$$P(z) = (z - z_0)^m\,\tilde{Q}(z) \quad \text{där } \tilde{Q}(z_0) \neq 0$$

m kallas då för nollställets multiplicitet.

Låt oss nu titta på $\sin x$.

$$\sin 0 = 0: \quad 0 \text{ är ett nollställe}$$

$$\sin^2 0 = 0: \quad 0 \text{ är ett nollställe}$$

$$x \sin x: \quad 0 \cdot \sin 0 = 0: \quad 0 \text{ är ett nollställe}$$

DEFINITION: $f(z)$ har nollställe med multiplicitet m i z_0 om

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

och $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
$|||$.
Om f är analytisk i z_0:

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1}}_{=0} + \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \cdots$$

$$\iff f(z) = (z - z_0)^m \underbrace{\left(\underbrace{b_m}_{\neq 0} + b_{m+1}(z - z_0) + \cdots \right)}_{g(z)}$$

$g(z)$ är analytisk (ty potensserie), $g(z_0) \neq 0$.

F-uppgift (att fundera på till i morgon): Låt $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ vara olika cirklar så att:

- Γ_1, Γ_3 tangerar varandra (på utsidan) i P och
- Γ_2, Γ_4 tangerar varandra (på utsidan) i samma punkt P.

Låt A, B, C, D vara skärningarna för $\underbrace{\Gamma_1 \text{ och } \Gamma_2}_{A}$; $\underbrace{\Gamma_2 \text{ och } \Gamma_3}_{B}$; Γ_3 och Γ_4; Γ_4 och Γ_1.

$A, B, C, D \neq P$.
Visa att

$$\frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{PB}^2}{\mathrm{PD}^2}$$

---

f har nollställe med multipliciteten m i z_0 $\iff$

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \text{ där } g(z_0) \neq 0.$$

(f analytisk i $z_0 \Rightarrow g$ analytisk i z_0)
SATS: Nollställena till en analytisk funktion $\not\equiv 0$ är isolerade, d.v.s. om $f(z_0) = 0$, så

$$\exists \delta > 0: \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta$$

$\langle$fig1$\rangle$.

Bevis. g analytisk i $z_0 \Longrightarrow g$ är kontinuerlig i en omgivning till z_0.

$$\underbrace{g(z_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ en omgivning } \{|z - z_0| < \delta\} \text{ till } z_0 \text{ så att } g \neq 0 \text{ i hela omgivningen.}}_{\text{fundera igenom detta med } \varepsilon\text{-}\delta\text{-analys}}$$

$\Longrightarrow f \neq 0$ i $U = \{0 < |z - z_0| < \delta\}$, ty

$$\begin{aligned} z \neq z_0 &\Rightarrow (z - z_0)^m \neq 0 \\ z \in U &\Rightarrow \quad g(z) \neq 0 \end{aligned}$$

□

FÖLJDSATS: f analytisk och har ett icke-isolerat nollställe $\Rightarrow f \equiv 0$ i en cirkelskiva runt z_0. ⟨fig2⟩

|||.

Det finns ingen funktion som är analytisk i 0, $\not\equiv 0$, och som har nollställena $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ eftersom nollan blir ett icke-isolerat nollställe.

$$(1+z)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \cdots, \qquad \binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\text{men } (1+z)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log(1+z)}$$

Vilken log-gren ska man välja för att utvecklingen ska gälla?

Laurentutvecklingar

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot z^n} + \cdots$$

$\frac{1}{z}$ kring 0 $\Longleftrightarrow z$ kring ∞.

e^t Taylorutvecklas överallt utom i ∞.

$$\Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \ldots \quad \text{överallt utom i } z = 0$$

Detta kallas *inte* för en potensserie.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

Konvergent för $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| > 1$. ⟨fig3⟩.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} \langle \text{fig4} \rangle$$

SATS (satsen om Laurentutvecklingar). f är analytisk i cirkelringen

$$0 \leqslant r < |z - z_0| < R \leqslant \infty$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in \text{cirkelringen}$$

och

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

γ är enkel, sluten, går i cirkelringen, runt hålet. ⟨fig5⟩.

$r = 0$: $0 < |z - z_0| < R$ punkterad cirkelskiva.

En "omgivning" av typen $0 < |z - z_0| < \delta$: punkterad omgivning (eng. *deleted*).

DEFINITION: z_0 kallas isolerad singularitet (singulär punkt) för f om f är analytisk i en punkterad omgivning till z_0, men ej i z_0.

DEFINITION: z_0 isolerad singularitet för f:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

i $0 < |z - z_0| < R$. z_0 kallas **hävbar** singularitet om utvecklingen ovan inte innehåller negativa potenser. z_0 kallas **pol** om utvecklingen innehåller ändligt många negativa potenser. z_0 kallas **väsentlig singularitet** om utvecklingen innehåller oändligt många negativa potenser.