2006–09–19

DEFINITION: F är en primitiv funktion till f i D om $F' = f$ i D.

I det reella fallet gäller:

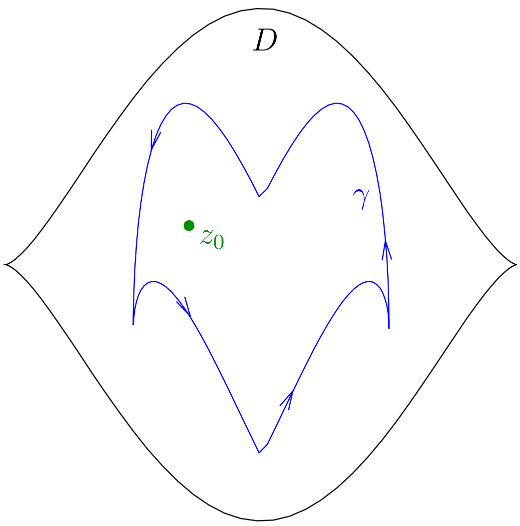
$$f \text{ är kontinuerlig } \implies \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{är en primitiv till } f$$

I det komplexa fallet gäller på motsvarande sätt:

$$f \text{ är analytisk } \implies \int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{är primitiv till } f$$

Vilken kurva ska man ta när man integrerar från z_0 till z? Det spelar ingen roll — integralen är oberoende av vägen.

Cauchys integralformler för derivatorna



Figur 1: Kurvan γ och punkten z_0 som Cauchys integralformel leker med.

SATS: (Cauchys integralformel). $f : D \to \mathbb{C}$ är analytisk, $z_0 \in D$, γ är en enkel sluten kurva, $\gamma \in D$ tillsammans med sitt inre, γ omringar z_0 (se vidare figur 1). Då gäller:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

$\|$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

Derivera formellt[1] med avseende på z:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma -\frac{1}{(\zeta - z)^2} \cdot (-1) \cdot f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta$$

Detta ger oss Cauchys formler för derivatorna:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta$$

Fick vi derivera under integralen?

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta$$

Med andra ord, går följande mot 0 då $\Delta z \to 0$?

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta \right| =$$

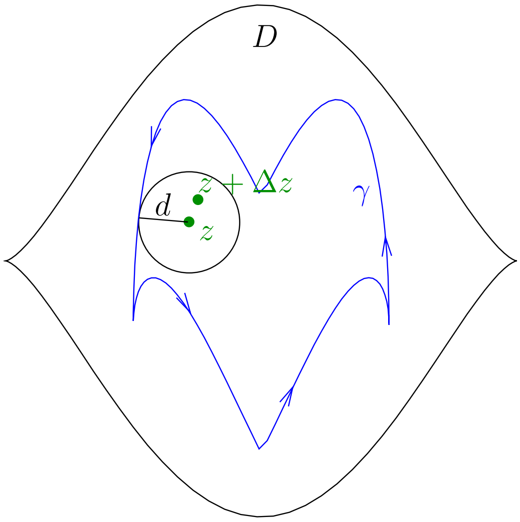
$$= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left[\frac{1}{\Delta z} \left(\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z + \Delta z)}\, \mathrm{d}\zeta - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \right) - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta \right] \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{\Delta z} \int_\gamma \frac{f(\zeta)(\zeta - z) - f(\zeta)(\zeta - z - \Delta z)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}\, \mathrm{d}\zeta - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}\, \mathrm{d}\zeta - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \underbrace{\left(\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right)}_{= \frac{\zeta - z - \zeta + z + \Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}} \mathrm{d}\zeta \right| =$$

[1]Formellt så till vida att det inte är säkert att man får derivera under integralen (d.v.s byta ordning på derivering och integrering).



Figur 2: Kurvan γ, punkterna z och z_0, samt avståndet d.

$$= \frac{1}{2\pi} |\Delta z| \cdot \left| \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)} \, \mathrm{d}\zeta}_{=\mathscr{I}} \right|$$

Vi vet att $|\Delta z| \to 0$ då $\Delta z \to 0$, så allting går mot 0 om integralen $\mathscr{I}$ är begränsad. För att förvissa oss om att så är fallet gör vi oss en bild av situationen (figur 2). z och $z + \Delta z$ befinner sig båda i γ:s inre. Sätt $d = \operatorname{dist}(z, \gamma) \overset{\text{def}}{=} \min_{\zeta \in \gamma} |z - \zeta|$ och låt Δz vara sådant att $|\Delta z| < \frac{1}{2}d$ (eftersom Δz ska gå mot noll är det ingen inskränkning att anta att dess belopp är mindre än något visst tal).

$$\operatorname{dist}(z + \Delta z, \gamma) > \frac{d}{2}$$

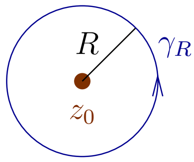
$$\frac{1}{\operatorname{dist}(z + \Delta z, \gamma)} < \frac{2}{d}$$

Om vi nu använder ML-olikheten på integralen $\mathscr{I}$ ovan får vi

$$\mathscr{I} < \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{2}{d} \cdot \text{längd}(\gamma)$$

Detta är ett begränsat tal som inte beror på Δz, vilket ger oss

$$\frac{1}{2\pi} |\Delta z| \cdot |\mathscr{I}| \to 0 \text{ då } \Delta z \to 0$$



Figur 3: Kurvan γ_R: en cirkel kring z_0, genomlöpt ett varv moturs.

vilket enligt ovan innebär att

$$\exists f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta$$

(Vi visste att f är analytisk. På samma sätt får vi

$$\exists\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta$$

Sats: f är analytisk i $D \implies f \in \mathcal{C}^\infty(D)$.

Sats: (*Liouvilles sats*) f är en hel funktion (d.v.s. analytisk i $\mathbb{C}$), $|f| \leq M$ i $\mathbb{C}$

$$\implies f \equiv \text{konstant i } \mathbb{C}$$

Bevis. Tag $z_0 \in \mathbb{C}$ godtycklig. Låt kurvan γ_R beskrivas av $|z - z_0| = R$ (se figur 3). Cauchys formel för derivatan:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z$$

Notera att nämnarens belopp är R^2. ML-olikheten ger:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2\pi R \to 0 \text{ då } R \to \infty.$$

Alltså är $|f'(z_0)|$, som ju inte beror på R, mindre än något som går mot noll då $R \to \infty$.

$$\implies f'(z_0) = 0 \implies f' \equiv 0 \text{ i } \mathbb{C} \implies f \equiv \text{konstant i } \mathbb{C} \qquad \square$$