2006–09–18

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$$

Kurvor som vi använder oss av kommer att vara styckvis $\mathcal{C}^1$.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t \quad (z' = x' + \mathrm{i}\,y')$$

Om det är så att γ är en cirkel med medelpunkt i z_0:

$$\gamma = \{|z - z_0| = r\},$$

(ett varv i positiv riktning, om man inte säger annat), så gäller:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\,\pi\,\mathrm{i} \Longleftrightarrow \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 1$$

Cauchy-Goursats Sats: $\gamma \subset D$, tillsammans med γ:s inre. (γ är en enkel, sluten kurva.)

$f\colon D \to \mathbb{C}$ är analytisk.

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

(Beviset behöver ni bara kunna för fall då $f \in \mathcal{C}^1$.)

Deformation av konturer

⟨fig1⟩.

Lokalisering: ⟨fig2⟩.

γ_j omringar z_j. z_j är den enda punkten där f inte är analytisk innanför γ_j. (Överallt annars är f analytisk.)

“Låt Γ vara kurvan γ fast kila in och gå igenom γ_j:na också.”

f analytisk på och innanför Γ:

$$\Longrightarrow \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Snitten genomlöps en gång åt vardera hållet. Totala bidraget av ett snitt blir noll.

$$\int_C + \int_{-C} = 0$$

$$0 = \int_\Gamma = \underbrace{\int_\gamma}_{\text{moturs}} + \underbrace{\int_{-\gamma_1} + \cdots + \int_{-\gamma_k}}_{\text{medurs}} + \underbrace{\int_{\text{snitten}}}_{=0}$$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

⟨fig3⟩

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

ML-olikheten

SATS: f är kontinuerlig i en omgivning av kurvan $\gamma \in \mathcal{C}^1$ (styckvis). Längden av kurvan γ är L. $|f| \leqslant M$ på γ.

$$\Longrightarrow \left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant M L = \max_\gamma |f| \cdot \text{längd}(\gamma)$$

Bevis. $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,\mathrm{d}t$$

(Komplexvärd integrand.) Lite trickartat bevis.

$$g(t)\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g \text{ kontinuerlig}$$

$$\text{Gäller } \left| \int_a^b g(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t \quad ?$$

Antingen är den vänstra integralen noll, eller så kan det skrivas på polär form.

I.

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \left| \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \right| = 0 \leqslant \int_a^b \underbrace{|g(t)|}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t$$

II.

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \left| \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \left| \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^b (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} g(t))\mathrm{d}t}_{\text{reellt, ty } \geqslant 0} = \mathrm{Re}\left[\int_a^b (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} g(t))\mathrm{d}t \right] =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} g(t))\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\, g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_a^b \underbrace{f(z(t))\, z'(t)}_{=g(t)}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{\leqslant M} |z'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant M \int_a^b |z'(t)|\,\mathrm{d}t = M \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = M L \qquad \square$$

Cauchys integralformel

SATS: $f: D \to \mathbb{C}$ analytisk, $z_0 \in D$, γ enkel, sluten och har z_0 i sitt inre (γ är styckvis $\mathcal{C}^1$, ett varv moturs); $\gamma \subset D$, tillsammans med sitt inre.

$$\Longrightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Bevis. ⟨fig3⟩

Deformera γ till $\gamma_r = \{z\colon |z - z_0| = r\}$ där r är tillräckligt litet (för att cirkeln ska ligga i D). Enligt deformationsprincipen:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \overset{?}{=} f(z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0)\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0)\cdot \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \left(\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \right) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Nu tar vi absolutbeloppet:

$$\left| \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0)\cdot 1 \right| = \left| \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \right| \leqslant [ML\text{-olikheten}] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\max\limits_{z \in \gamma_r} |f(z) - f(z_0)|}{r} \cdot 2\pi r = \max_{z \in \gamma_r} |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{för} \quad r < \delta_\varepsilon$$

f analytisk $\Rightarrow f$ kontinuerlig: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0\colon \forall z\colon |z - z_0| < \delta_\varepsilon \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \left| \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0) \right| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0) = 0 \qquad \square$$

OBS! Vi *har* använt att f är analytisk, för att påstå att

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \quad \forall r \text{ tillräckligt små}$$

Uppgift 2.3.2

$$\int\limits_{|z| = \rho} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-3)}\,\mathrm{d}z$$

De "intressanta" punkterna är 0 och 3. Kurvan är en cirkel med medelpunkt i origo. Det finns två väsentliga fall att titta på.

1. $\rho < 3$. 3 är utanför cirkeln.

$$\text{Funktionen } z \mapsto \frac{e^z}{z-3} \text{ kommer vara analytisk.}$$

$$\int\limits_{|z|=\rho} \frac{e^z/(z-3)}{z-0}\,dz = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z-3}\right|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{2}{3}\pi i$$

$\rho = 3$ går inte.

2. $\rho > 3$. Gör en lokalisering: γ_1 liten kurva kring 0, γ_2 liten kurva kring 3.

$$\int\limits_{|z|=\rho} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z/(z-3)}{z}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z/z}{z-3}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{e^z}{z-3}\right|_{z=0} + \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=3} \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{e^3}{3} \right)$$

Uppgift 2.3.8 Generellt:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$$

där R är en rationell funktion. Observera att vi integrerar över en hel period.

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta = i\,z\,d\theta$$

$$d\theta = \frac{1}{i\,z} = -i\frac{dz}{z}$$

I uppgiften har vi en halv period:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \ldots$$

Först kan det vara idé att göra:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \int_0^{\pi} \frac{2\,d\theta}{3-\cos 2\theta} = [\varphi = 2\theta] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3-\cos\varphi}$$

Vi har nu en hel period, och sänkt gradtal.

$$= \begin{bmatrix} z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \end{bmatrix} = \int\limits_{|z|=1} \frac{-\,\mathrm{i}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z}{3 - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = -\,\mathrm{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{3z - \frac{z^2+1}{2}} = -\,\mathrm{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{2\,\mathrm{d}z}{6z - z^2 - 1} =$$

$$= 2\,\mathrm{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 6\,z + 1} =$$

$$[z^2 - 6z + 1 = (z-3)^2 - 8]$$

$$= 2\,\mathrm{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z - 3 - \sqrt{8}\right)\left(z - 3 + \sqrt{8}\right)} = 2\,\mathrm{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{1/\left(z - 3 - \sqrt{8}\right)}{z - \left(3 - \sqrt{8}\right)}\,\mathrm{d}z =$$

$$= [\text{Cauchys integralformel}] = 2\,\mathrm{i} \cdot 2\,\pi\,\mathrm{i}\, \frac{1}{z - 3 - \sqrt{8}}\bigg|_{z = 3 - \sqrt{8}} =$$

$$= -\,4\,\pi \cdot \frac{1}{3 - \sqrt{8} - 3 - \sqrt{8}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{8}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$