2006–09–13

DEFINITION: $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $z \neq 0$.

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = \exp\left(\frac{1}{n}(\ln|z| + (\theta_0 + 2k\pi)i)\right) =$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}(\ln|z| + i\,\theta_0)\right)}_{\text{entydigt}} \cdot \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vi får n olika värden, upprepas med växande k.

Betrakta $e^{2k\pi i/n}$, $k = \underbrace{0, 1, \ldots, n-1}_{n\,\text{st}}$. $k = m\,n + r$ där r är resten då k delas med m.

$$e^{2k\pi i/n} = \exp\left(2\,\frac{(m\,n + r)\pi}{n}\,i\right) = \underbrace{e^{2m\pi i}}_{=1} \cdot e^{\frac{2r\pi i}{n}}$$

$$\begin{array}{ccc} 0, & 1, & \ldots, \; n-1, \\ n, & n+1, & \ldots, \\ 2n, & \ldots & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Det finns inte fler än n olika värden. Finns det verkligen n **olika** värden?

$$k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$$\exp\left(\frac{2k_1\pi i}{n}\right) = \exp\left(\frac{2k_2\pi i}{n}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exp\left(2 \cdot \frac{k_1 - k_2}{n} \cdot \pi i\right) = 1 = \exp(2\pi i \cdot p) \quad [p \in \mathbb{Z}]$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2(k_1 - k_2)}{n}\pi i = 2\pi i\, p \Longleftrightarrow \frac{k_1 - k_2}{n} \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow k_1 = k_2, \quad \text{ty } k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Nu har vi visat att $z^{\frac{1}{n}}$ har exakt n olika värden.

$$z^{\frac{1}{n}} = \underbrace{|z|^{\frac{1}{n}}}_{=\sqrt[n]{|z|}} \cdot e^{i(\theta_0 + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \{-2, 2\}$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$\sqrt{} \overset{\text{def}}{=}$ det icke-negativa värde...

$\alpha \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow z^\alpha$ har oändligt många värden.

$\langle$fig1$\rangle$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

e^z är definierad som en entydig funktion: exponentialfunktionen $e^z = \exp(z)$.

$e^{\alpha} = e^{\alpha \log e}$ är flertydig. Vi får exponentialfunktionen när vi gör valet $k = 0$.

Kurvintegraler på komplex form.

"Vi kommer aldrig integrera komplexa funktioner över hela områden".

DEFINITION: $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, kontinuerlig. Då kallas γ en **kurva** i $\mathbb{R}^2$. ⟨fig2⟩

⟨fig3⟩

$$C\colon \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$C\colon \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}, \quad t \in \overleftarrow{[-1, 1]}$$

DEFINITION: $\gamma_1 = \gamma_2$ om de kan fås av varandra genom omparameterisering.

$\gamma \in \mathcal{C}^1$ (*smooth*).

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \gamma_k, \quad \gamma_k \in \mathcal{C}^1\colon \qquad \gamma \text{ är styckvis } \mathcal{C}^1$$

Komplex variant: $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. (Man identifierar $(x(t), y(t)) \widehat{=} x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$).

$$C\colon z = x + \mathrm{i}\, y = e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Jordankurva: enkel, sluten kurva. Sluten innebär $\gamma(a) = \gamma(b)$. Att den är enkel innebär att den inte skär sig själv. Jordankurvor har en begränsad insida och en obegränsad utsida (Jordans sats, svår att bevisa).

I fortsättningen av den här kursen: γ är (normalt sett) enkel sluten styckvis $\mathcal{C}^1$, moturs orienterad (ett varv).

$\gamma \in \mathcal{C}^1$ (behöver ej var sluten).

$$f\colon D \to \mathbb{C}$$

$$\gamma \subset D$$

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, \mathrm{d}t$$

där $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$, $z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}\, y'(t)$. Man kan också göra $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\, \mathrm{d}y$.

Om $f = u + \mathrm{i}v$, kan integralen uttryckas (formellt):

$$\int_{\gamma} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma} (u + \mathrm{i}\, v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\, \mathrm{d}y) = \int_{\gamma} (u\, \mathrm{d}x - v\, \mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_{\gamma} (v\, \mathrm{d}x + u\, \mathrm{d}y)$$

Stämmer, om man skriver om m.h.a. definitionen.

Två uppgifter, varav den andra kommer vara väldigt väsentlig.

1.6.2

$$\int_\gamma \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z, \quad \text{där } \gamma \text{ är sträckan från 0 till } z_0$$

$$\int_\gamma \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (\mathrm{e}^x \cos y\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (\mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x \cos y\,\mathrm{d}y)$$

Parameterisera γ. ⟨fig4⟩

$$\gamma\colon \begin{cases} z = t\,z_0 \\ t \in [0,1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = t\,x_0 \\ y = t\,y_0 \end{cases}$$

—

Om jag vill parameterisera sträckan från z_1 till z_2:

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1]$$

1.6.16

$$\gamma\colon \begin{cases} z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$$

γ är alltså en cirkel med medelpunkt i z_0 och radien r.

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_0)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{r^m \mathrm{e}^{m\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\,r^{1-m} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(1-m)\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta =$$

$$= \begin{cases} [m=1] = \mathrm{i}\,r^0 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^0\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\cdot 2\pi = 2\,\pi\,\mathrm{i} \\ [m \neq 1] = 0 \end{cases}$$

Periodiska funktioner integreras över helt antal perioder: resultat: noll.

Greens Sats: $P,\ Q \in \mathcal{C}^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$. E kompakt $\subset D$. ∂E positivt orienterad (moturs/området till vänster), ett varv.

$$\int_{\partial E} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Specialfall av

Stokes Sats (abstrakt):

$$\int_\gamma \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

Cauchy-Goursats Sats: $f\colon D \to \mathbb{C}$, f analytisk i D. γ är enkel, sluten och styckvis $\mathcal{C}^1$, som tillsammans med sitt inre ligger i D:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

⟨fig5⟩

I exempel 2 ovan är funktionen inte analytisk på γ:s inre: $z_0 \in \gamma$:s inre.

För $m \leqslant 0$ är det analytiskt. För sådana m följer resultatet ur Cauchy-Goursats sats.

Bevis. Cauchys sats (kräver $f \in \mathcal{C}^1$).

f' kontinuerlig $\Rightarrow u, v \in \mathcal{C}^1$ $(f = u + \mathrm{i}\, v)$.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma u\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\gamma v\mathrm{d}x - u\,\mathrm{d}y$$

$u, v \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ vi kan använda Grens sats:

$$\int_{\gamma = \partial E} f(z)\mathrm{d}z = \ldots = \iint_E \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\equiv 0,\text{ Caucy-Riemann}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_E \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial u}\right)}_{\equiv 0,\text{ Cauchy-Riemann}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□